

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

ریاضی و آمار (۱)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی – علوم و معارف اسلامی

پایه دهم

دوره دوم متوسطه

۱۳۹۶



وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

ریاضی و آمار (۱) - پایه دهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۰۲۱۲

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری

حمیدرضا امیری، علی ابرانمش، مهدی ایزدی، طبیه حمزه‌بیگی، خسرو داودی، محمد‌هاشم رستمی، ابراهیم‌ریحانی، محمدرضا سیدصالحی، احمد شاهورانی، میرشهرام صدر، شادی صفی‌نیا، اکرم قابل‌رحمت و محمد مقاصدی (اعضای شورای برنامه‌ریزی)

حمیدرضا امیری، علی ابرانمش، آزادیه حسین‌فرزان، میرشهرام صدر، حسین میرزاچی و عادل محمدپور و با همکاری فرشید خان‌زاده در بخش آمار (اعضای گروه تألیف) - سیداکبر میر جعفری (ویراستار ادبی)

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

لیدانیکروش (مدیر امور فنی و چاپ) - مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - شاهرخ خره‌غانی (نگاشتارگر) (طراح گرافیک)، طراح جلد و صفحه‌آرا - بهنام خیامی، امیر نساجی (تصویرگر) - فرزانه پورسیفی (رسام) - محسن خره‌غانی (عکاس) - کبری اجلاتی، نوشین مقصود دوست: فرشته‌ار جمند، فاطمه پزشکی، حمیدرضا ثابت کلاچاهی و احمد رضامینی (امور آماده‌سازی)

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۰۹۰۶۱۱۶۱-۹، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبگاه: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارویخش) تلفن: ۰۹۹۸۵۱۶۱-۵، دورنگار: ۰۹۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

چاپ دوم ۱۳۹۶

نام کتاب:

پدیدآورنده:

مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

مدیریت آماده‌سازی هنری:

شناسه افزوده آماده‌سازی:

نشانی سازمان:

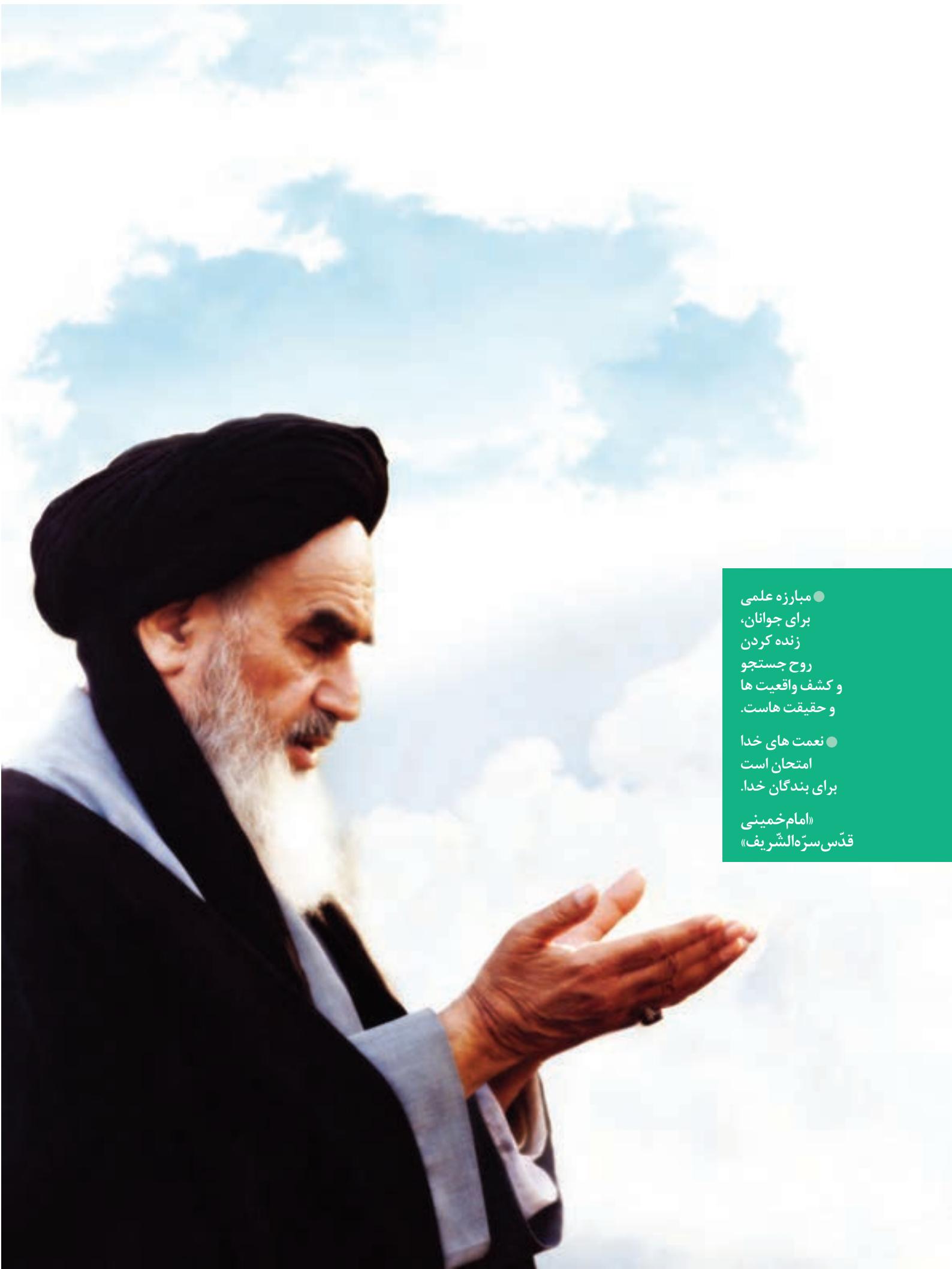
ناشر:

چاپخانه:

سال انتشار و نوبت چاپ:

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۵۰۳-۶

ISBN: 978-964-05-2503-6



● مبارزه علمی
برای جوانان،
زنده کردن
روح جستجو
و کشف واقعیت ها
و حقیقت هاست.

● نعمت های خدا
امتحان است
برای بندگان خدا.

«امام خمینی
قدّس سرّه الشّریف»

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلحیص، تبدیل، ترجمه، عکسبرداری، نفاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

ریاضی

۹

عبارت‌های جبری

فصل اول

۱۰	چنداتحاد جبری و کاربردها	درس ۱
۱۸	عبارت‌های گویا	درس ۲

۲۵

معادله درجه دوم

فصل دوم

۲۶	معادله و مسائل توصیفی	درس ۱
۳۵	حل معادله درجه ۲ و کاربردها	درس ۲
۴۹	معادله‌های شامل عبارت‌های گویا	درس ۳

۵۵

تابع

فصل سوم

۵۶	مفهوم تابع	درس ۱
۶۶	ضابطه جبری تابع	درس ۲
۷۲	نمودار تابع خطی	درس ۳
۷۹	نمودار تابع درجه ۲	درس ۴

فهرست

آمار

۸۷

کار با داده‌های آماری

فصل چهارم

۸۸	گردآوری داده‌ها	درس ۱
۱۰۱	معیارهای گراییش به مرکز	درس ۲
۱۰۵	معیارهای پراکندگی	درس ۳

۱۱۵

نمایش داده‌ها

فصل پنجم

۱۱۶	نمودارهای یکمتغیره	درس ۱
۱۲۶	نمودارهای چندمتغیره	درس ۲

سخنی با معلم

کتاب ریاضی و آمار پایه دهم رشته انسانی در جهت اهداف برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های درسی دوره اول متوسطه تألیف شده است. زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام دادن محاسبات بود. در رویکرد جدید، ضمن توجه به این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوّة تفکّر و تعقّل و رشد توانایی حل مسئله است. در واقع رویکرد «آموزش ریاضی برای حل مسئله» به «آموزش از طریق حل مسئله» تغییر کرده است. رسیدن به چنین هدفی، مشکلات و دشواری‌های فراوانی دارد و به سرعت امکان‌پذیر نیست ولی مدنظر قرار دادن آن می‌تواند جهت اصلی حرکت جامعه آموزش ریاضی را تعیین کند. در این میان، اصلی‌ترین و مؤثرترین وظیفه بر عهده معلم قرار دارد. قدرت انعطاف و هماهنگی و همراهی معلم‌مان با برنامه‌های جدید ستودنی است. بر این اساس، مؤلفان کتاب حاضر سعی کرده‌اند برای انجام وظیفه خویش در مورد آموزش معلم‌مان، ضمن اطلاع‌رسانی مناسب و بهنگام درباره تألیف، کتاب راهنمای معلم و نیز فیلم‌های آموزشی مربوط را بهموقع در اختیار همکاران عزیز قرار دهند.

ساختمان کتاب حاضر از سه بخش اصلی «فعالیت»، «کار در کلاس» و «تمرین» و نیز مثال‌های حل شده و توضیحات به صورت متنی، نکات مهم و تعاریف، تشکیل شده است. آنچه در هر «فعالیت» به طور عمده مدنظر بوده آشنایی داشن آموزان با مفهوم درس و سهیم بودن او در ساختن دانش مورد نظر است. فعالیت‌ها شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال کردن، بررسی کردن، حدس و آزمایش، توضیح راه حل، مرتب کردن، قضاؤت در مورد یک راه حل و مقایسه راه حل‌های مختلف است. هدایت فعالیت‌ها ساده و آسان نیست و صد البته، اجرای مناسب آن ارزش زیادی دارد. فعالیت‌های در حد متوسط طراحی شده‌اند؛ بنابراین معلم می‌تواند با توجه به زمان و توانایی داشن آموزان خود، یک فعالیت را غنی‌تر کند یا با اراده توضیحات بیشتر و ایجاد تغییراتی، آن را ساده‌تر نماید و حتی فعالیتی مکمل در جهت آموزش همان مفهوم درسی طراحی کند.

مؤلفان در کتاب ریاضی و آمار (۱) بر این باورند که استفاده از مثال‌ها و مسائل کاربردی که رابطه‌ای با شاخه‌های مختلف رشته علوم انسانی داشته باشد می‌تواند علاوه بر ایجاد انگیزه در داشن آموزان

برای یادگیری ریاضی و آمار به پورش تفکر ریاضی در آنها کمک کرده طوری که در مواجهه با مسائل و مشکلات روزمره از این ذهنیت استفاده لازم را برد و در آینده افرادی خلاق، متفکر و با قدرت تجزیه و تحلیل و دلسوز برای خدمت به جامعه و ایران اسلامی تربیت شوند.

هنگام انجام دادن فعالیت، هدایت گفت و گوی کلاسی یا گفتمان ریاضی، که در آن دانشآموzan به ارائه دیدگاهها و دفاع از اندیشه‌های خود و نیز قضاوتو و ارزیابی افکار و روش‌های ریاضی دیگر دانشآموzan می‌پردازند، به عهده معلم است. به طور خلاصه، فراهم کردن موقعیت‌های یادگیری و فرست دادن به دانشآموز برای اینکه خود به کشف مفهوم بپردازد، می‌تواند یکی از دل مشغولی‌های همکاران عزیزان باشد. «کار در کلاس» با هدف تثبیت و تعمیق و در مواردی، تعیین یادگیری طراحی شده و انتظار این است که دانشآموzan بیشترین سهم را در انجام آن داشته باشند. مثال‌ها توسط همکاران محترم در کلاس بررسی شده و سعی می‌شود تا همانند کار در کلاس‌ها دانشآموzan به حل و بررسی آنها مشغول باشند و روی نکات مهم و تعاریف که عمده‌تر در داخل کادرهایی قرار دارند از طرف دییران محترم تأکید لازم انجام خواهد پذیرفت. حل «تمرین»‌ها به عهده دانشآموzan است؛ اما ضرورت دارد که معلم زمینه را برای طرح پاسخ‌ها و بررسی آنها در کلاس فراهم سازد.

پس از آماده شدن نسخه اولیه کتاب، مؤلفان جلسات فشرده‌ای را برای نقد و اصلاح آن برگزار و برخی تغییرات و اصلاحات لازم را نیز در کتاب اعمال کردند. نظرات حاصل از اعتباربخشی و آرای معلمان سراسر کشور نیز در این اصلاحات متنظر قرار گرفت. در اینجا لازم است مراتب تقدیر و تشکر خود را از همه همکارانی که نسخه اولیه کتاب را مطالعه و نظرات و پیشنهادهای خود را به واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی ارسال کرده‌اند، ابراز نماییم. ده‌ها نقد رسیده از سراسر کشور نوید بخش حضور و مشارکت مؤثر دییران گرامی در تألیف کتاب‌های درسی است. علاوه بر آن، مشاورانی از مراکز آموزشی و پژوهشی نیز بخش‌هایی از کتاب را مطالعه و نقد کرده‌اند که جا دارد از آنها نیز قدردانی شود، همچنین از آقای مجید امیری برای استفاده از اشعار ایشان تشکر می‌کنیم. گروه تألیف، آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و عزیزان را از طریق وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۱ دارد. به علاوه، بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه یاده شده قابل دریافت است. اطمینان داریم که با اتکال به خدای متعال و تکیه بر تلاش، اراده و همت شما دییران محترم می‌توانیم به برآورده شدن اهداف کتاب امیدوار باشیم.

مؤلفان

فصل اول

عبارت‌های جبری

درس ۱ چند اتحاد جبری و کاربردها

درس ۲ عبارت‌های گویا



درس ۱

چند اتحاد جبری و کاربردها

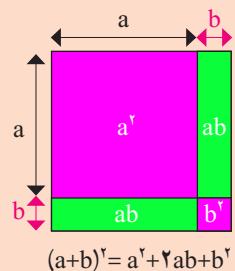
در سال قبل، با اتحادهای زیر آشنا شدید.

$$(a+b)^r = a^r + ۲ab + b^r$$

$$(a-b)^r = a^r - ۲ab + b^r$$

$$(a+b)(a-b) = a^r - b^r$$

$$(x+a)(x+b) = x^r + (a+b)x + ab$$



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

(الف) $(a+4)^r = a^r + \dots + \dots$

(ب) $(3a-1)^r = \dots - ۶a + \dots$

(پ) $(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}b)^r = ۲ + \dots + \frac{1}{2}b^r$

(ت) $(\sqrt{3} + \dots)(\sqrt{3} - \dots) = ۳ - ۲ = ۱$

(ث) $(x+4)(x+3) = x^r + (\dots)x + \dots$

(ج) $(3x+2)(3x-5) = \dots + (2-5)(3x) + (2)(-5) = \dots - \dots - \dots$

(ج) $(x+\dots)(x+\dots) = x^r + ۳x + ۲$

کار در کلاس

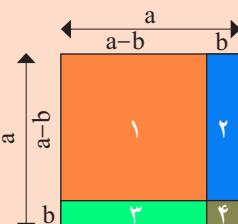


با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

(الف) $9x^r - ۱۶ = (3x-\dots)(3x+\dots)$



آفرینش، دفترش تا باز شد
با «حساب» و «هندسه» آغاز شد
دستِ حق تانقیش عالم می‌نگاشت
در سیرشت «دایره»، «بی» می‌گذاشت
شکل‌های هندسی و «منتظم»
او نهاده در نهادِ هر قلم
با «مثلث»، «دایره»، یا «مستطیل»
می‌شود اندام این عالم شکل!
آسمان، از اختوان پر کرده است
روز و شب را در «انتظار» کرده است
این همه مجموعه‌های بی‌نظیر
کهکشان‌های «شمارش ناپذیر»!
نظم این اعداد، در اوچ کمال
در تناسب گشته عالم، بی‌مثال
زلف عالم تا پریشان می‌شود
این ریاضی، شانه‌های آن می‌شود!
یا به استقراء و یا «برهان خلف»
می‌شود شانه، پریشانی زلف!
باز، بین جغرافیای بی‌حدود
کوه‌ها بر دشت‌ها گستره «عمود»!
از حیات و از جماد و از نبات
پُر نمود این «دستگاه مختصات»



$$\begin{aligned} \text{مساحت مربع: } & \\ s_1 &= (a-b)^2 \quad (1) \\ s_2 &= s - s_1 - s_3 - s_4 \\ &= a^2 - b(a-b) - b(a-b) - b^2 \quad (2) \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (1) \text{ و (2)} &\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b)x^2 + 2x + \frac{1}{9} &= x^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = (x+\dots)^2 \\ (4x^2 - 4x + 1) &= (\dots)^2 - 2(2x) + (1)^2 = (2x-\dots)^2 \\ (y^2 + 3y - 1) &= y^2 + (5-2)y - (5)(2) = (y-\dots)(y+\dots) \\ (9x^2 + 18x + 8) &= (3x)^2 + 6 \times (3x) + 8 \\ &= (3x)^2 + (\dots + \dots)(3x) + (2)(4) \\ &= (3x + \dots)(3x + \dots) \end{aligned}$$

کار در کلاس



عبارت‌های جبری زیر را به صورت ساده‌ترین حالت، تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} (a) 12x^7(x^2+6)^3 - 8x^5(x^2+6)^4 &= 4x^5(x^2+6)^3(3x^2 - 2(x^2+6)) \\ &= 4x^5(x^2+6)^3(\dots - \dots) \\ &= 4x^5(x^2+6)^3(x - \dots)(x + \dots) \\ (b) x^4 - 64x^4 &= x^4(x^4 - 64) \\ &= x^4(\dots - \dots)(\dots + \dots) \\ &= x^4(\dots - \dots)(x + \sqrt{\lambda})(\dots + \dots) \end{aligned}$$

کار در کلاس



بعضی از محاسبات عددی را می‌توان با کمک اتحادها، به راحتی انجام داد. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{aligned} (a) 999^2 &= (1000-1)^2 = \dots \\ (b) 96 \times 104 &= (100-4)(\dots + 4) = \dots - \dots \\ (c) \dots &= (100+2)^2 = \dots + \dots + \dots = \dots \end{aligned}$$

(ت) خودتان نیز یک مثال عددی بزنید که برای محاسبه آن از اتحادها، کمک گرفته‌اید.
(ث) آیا کاربرد دیگری از اتحادها، به ذهن شما می‌رسد؟ لطفاً توضیح دهید.



مثلث خیام

در اینجا باید به رخداد مهمی که با شناسایی کتاب جبر و مقابله خیام در اروپا صورت گرفت پردازیم. می‌دانیم که صورت بسط یافتهٔ دو جمله‌ای به طراحی مثلثی عددی می‌انجامد که پیش از این مثلث نیوتون-پاسکال نامیده می‌شد.

در اواسط قرن بیستم دانشمندان اروپایی علاقه‌مند به بررسی تاریخ ریاضیات در سرزمین‌های اسلامی از خود پرسیدند: «ایا ممکن است این روش بسط دو جمله‌ای‌ها در سرزمین‌های اسلامی و به وسیلهٔ دانشمندان اسلامی نیز صورت گرفته باشد؟» نخستین بررسی‌ها به حضور این بسط در کتاب *فتح الحساب* غیاث الدین جمشید کاشانی رسید و در ادامه روشن شد این بسط به دانشمندی پیش از کاشانی یعنی خواجه نصیر الدین طوسی باز می‌گردد و در فصل اول از کتاب *جواجم الحساب* طوسی دیده می‌شود. ادامه پژوهش‌های نیز ردپای این بسط را به کتاب جبر و مقابلهٔ خیام رساند و مشخص شد برای اولین بار در سرزمین‌های اسلامی و حدود شش قرن قبل از نیوتون، خیام این دو جمله‌ای را در کتاب خود بسط داده است.



کار در کلاس

عبارت جبری $(a+b)^3$ را به کمک اتحاد مربيع دو جمله‌ای و حاصل ضرب عبارت‌های جبری ساده کنید.

$$(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = \dots\dots$$

برای ساده کردن $(a+b)^3$ ، چگونه عمل می‌کنید؟ آیا این پرسش را می‌توان برای توان‌های بزرگ‌تر از 4 نیز طرح کرد؟ آیا روشی وجود دارد که بتوان بدون ساده کردن عبارت‌های حاصل ضرب، جواب نهایی را به دست آورد؟

فعالیت زیر پاسخ مناسبی برای سؤال بالاست.



فعالیت

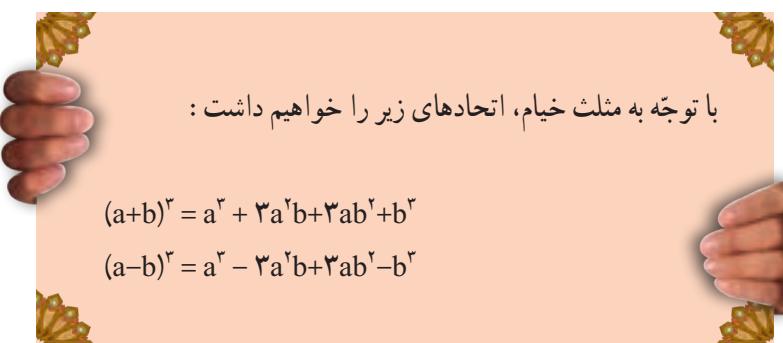
جدول زیر را در نظر بگیرید.

۱	$(a+b)^0 = 1$
۱ ۱	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
۱ ۳ ۲ ۱	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$
⋮	⋮
⋮	⋮

- در جدول بالا سمت چپ (مثلث خیام)، چه ارتباطی بین سطر دوم و سطر سوم وجود دارد؟ چه ارتباطی بین سطر سوم و سطر چهارم وجود دارد؟ چه رابطه‌ای بین سطر چهارم و سطر پنجم وجود دارد؟

۱. حکیم، عمر خیام - علی‌اکبر ولاپی. انتشارات آفتاب، تهران. ۱۳۸۹.

۲. آیا می‌توانید سطرهای هفتم و هشتم را کامل کنید؟
۳. چه ارتباطی بین سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب عبارت‌های جبری سطرهای جدول بالا در سمت راست وجود دارد؟
۴. آیا می‌توانید ضرایب $(a+b)^3$ را در جدول سمت راست، کامل کنید؟
۵. آیا می‌توانید توان‌های a و b در عبارت $(a+b)^5$ در جدول سمت راست را کامل کنید؟
۶. آیا توانسته‌اید حدس بزنید که چه ارتباطی بین اعداد سطرهای واقع در مثلث خیام و ضرایب توان‌های $(a+b)$ وجود دارد؟
۷. با توجه به اینکه $a-b=a+(-b)$ ، حاصل عبارت $(a-b)^3$ را براساس اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ به دست آورید.



کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای بالا، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

الف) $(2a+1)^3 = 8a^3 + \dots + 6a + \dots$

(ب) $(\frac{1}{3}a - 2)^3 = \dots - 3(\frac{1}{3}a)^2(2) + \dots - 8$

(پ) $(4a - 2b)^3 = \dots - \dots + \dots - 8b^3$

(ت) $(\dots + \dots)^3 = 27a^3 + \dots + \dots + \frac{1}{8}$

خواندنی

در تساوی های زیر، به جای علامت سؤال، عدد مناسب قرار

دهید:

$$1=2^0$$

$$1+1=2^1$$

$$1+2+1=2^2$$

$$1+3+3+1=2^3$$

$$1+4+6+4+1=2^4$$

- چه ارتباطی بین توان های عدد ۲ و سطرهای واقع در مثلث خیام وجود دارد؟

- آیا می توانید الگویی برای توان های عدد ۲، برحسب سطرهای واقع در مثلث خیام حدس بزنید؟

این حدس برای محاسبه 2^n با قرار دادن $a=b=1$ در تساوی زیر اثبات می شود.

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n$$

- آیا همیشه این روش (حدس زدن با توجه به مشاهده چند الگو) برای نتیجه گیری های کلی، صحیح است؟ به مثال زیر توجه کنید.

$$11^0 = 1$$

$$11^1 = 11$$

$$11^2 = (1+1^0)^2 = 1+2 \times 1^0 + 1^0 = 1+2+1 = 121$$

$$11^3 = (1+1^0)^3 = \dots + \dots + \dots = 1+3+ \dots + 1 = 1331$$

$$11^4 = (1+1^0)^4 = 1+4 \times 1^0 + \dots + 1^0 = 14641$$

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^2 و اعداد واقع در سطر سوم مثلث خیام وجود دارد؟

- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^3 و اعداد واقع در سطر چهارم مثلث خیام وجود دارد؟

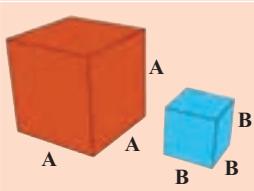
- چه ارتباطی بین توان به دست آمده در 11^4 و اعداد واقع در سطر پنجم مثلث خیام وجود دارد؟

- 11^5 را با ماشین حساب محاسبه کنید و با ضرایب موجود در سطر ششم مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

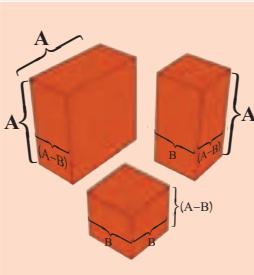
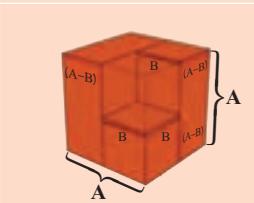
کار در کلاس



با توجه به اتحادهایی که تاکنون آموخته‌اید، اتحادهای زیر را با استفاده از حاصل ضرب عبارت‌های جبری بررسی کنید و تساوی دوطرف را نشان دهید. سپس عبارت کلامی این اتحادها را بنویسید.



$$A^r - B^r$$



$$(A - B)(A^r + AB + B^r) = A^r - B^r$$

$$(a - b)(a^r + ab + b^r) = a^r - b^r$$

اتحاد تفاضل مکعب دوجمله‌ای

$$(a + b)(a^r - ab + b^r) = a^r + b^r$$

اتحاد مجموع مکعب دوجمله‌ای

فعالیت



با استفاده از اتحادهای بالا، عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} \wedge y^r - 1 &= (2y)^r - 1^r = (2y - 1)((2y)^r + (2y) + 1^r) \\ &= (2y - 1)(\dots + \dots + \dots) \end{aligned}$$

$$\wedge a^r + 1 = (2a)^r + 1^r = (\dots + \dots)((2a)^r - \dots + 1)$$

$$\dots + b^r = (2a)^r + b^r = (2a + \dots)(\dots - 2ab + \dots)$$

$$t^r - \frac{1}{\wedge} = (t^r)^r - \left(\frac{1}{\wedge}\right)^r = (\dots - \dots)(\dots + \dots + \dots)$$

تمرین



۱. با استفاده از اتحادها، حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

$$(x - 1)^r, (y + \frac{1}{4})^r, (2 - \frac{a}{3})^r, (b - 2)^r, (2z - \frac{1}{2})^r$$

۲. با استفاده از اتحادها، در قسمت‌های نقطه‌چین، عبارت مناسب بگذارید.

$$(a + \sqrt{2})^n = a^n + \dots + 2$$

$$(1 - 4x)^n = 1 - 4x + \dots$$

$$(\sqrt{3} + x)^n = 3\sqrt{3} + \dots + 3\sqrt{3}x^n + \dots$$

۳. به کمک اتحادها، عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

$$x^6 - 1, 1 + z^3, 8 - t^6$$

$$9x^3 - 6x + 1$$

$$x^4 + 5x + 6$$

$$4x^3 + 14x + 12$$

۴. با استفاده از اتحاد مجموع مکعب دو جمله‌ای یا اتحاد تفاضل مکعب، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

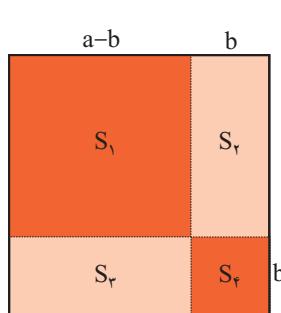
$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$(7x - 2)(49x^2 + 14x + 4)$$

۵. عبارت‌های جبری زیر را به ساده‌ترین عبارت‌ها تجزیه کنید.

$$12x^6(x^2 + 5)^3 - 10x^4(x^2 + 5)^4 \quad (\text{الف})$$

$$x^8 - 625x^4 \quad (\text{ب})$$



۶. مربع رو به رو را که اندازه ضلع آن a است، در نظر بگیرید و فرض کنید مساحت آن برابر با S است. ضلع آن را به دو پاره خط تقسیم کنید و طول یکی را b در نظر بگیرید.

(الف) مساحت‌های S_1, S_2, S_3 و S_4 را به دست آورید.

(ب) مساحت S را برحسب مساحت‌های S_1, S_2, S_3 و S_4 به دست آورید.

(پ) اتحاد مربع دو جمله‌ای را از قسمت (ب) نتیجه بگیرید.

۷. با استفاده از اتحادهایی که آموختید، عبارت‌های عددی زیر را به دست آورید.

$$(1001)^3 = \dots$$

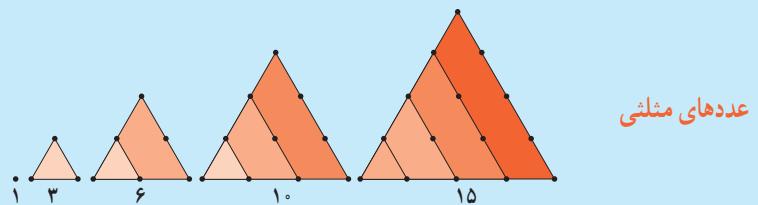
$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = \dots$$

خواندنی

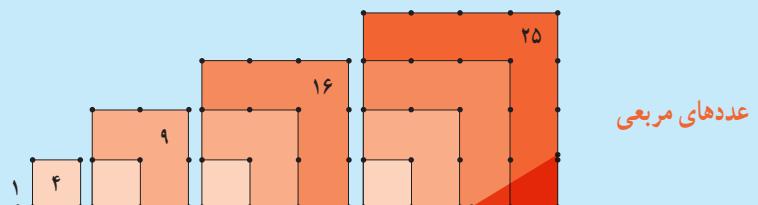
ابوعلی‌سینا، دانشمند مسلمان ایرانی که در قرن سوم و چهارم هجری قمری زندگی می‌کرده است، در کتاب شفا، از اعداد مثلثی، اعداد مربعی، اعداد مخمسی و ... سخن گفته است و درباره خواص آنها، نکاتی را ذکر کرده است.

در زیر اعداد مثلثی و اعداد مربعی، به همراه جمله‌ای به زبان خود ابوعلی‌سینا در مورد رابطه بین این اعداد آمده است.
همان‌گونه که مشاهده می‌کنید $1, 3, 6, 10, 15, \dots$ اعداد مثلثی و $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ اعداد مربعی‌اند.

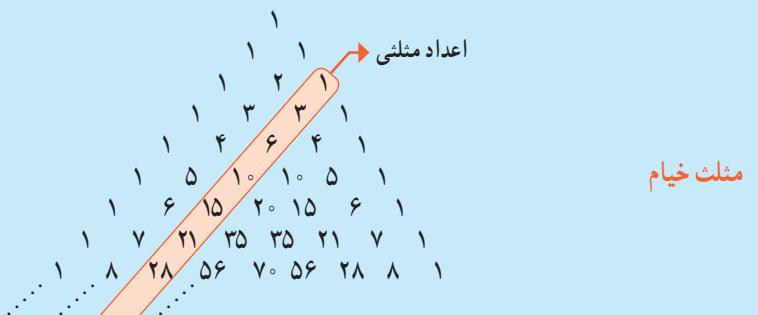
حال مثلث خیام را یک بار دیگر نگاه کنید.



این اعداد در این مثلث قابل مشاهده‌اند و می‌توان یک الگو براساس اعداد واقع در مثلث خیام برای سایر اعداد به دست آورد.



فَيَكُونُ كُلُّ مُرَبَّعٍ مِنْ مُثَلَّثٍ فِي ذَرْجَتِهِ وَ مُثَلَّثٌ أَنْقَصَ مِنْ ذَرْجَتِهِ بِواحدٍ
مجموع هر عدد مثلث و عدد مثلث ماقبل آن مساوی است با عدد مربع همان مرتبه



چگونه می‌توانید ارتباط بین اعداد مثلثی، اعداد مربعی و اعداد مخمسی را از طریق مثلث خیام به دست آورید؟

درس ۲

عبارت‌های گویا

در سال گذشته با عبارت‌های گویا و ساده کردن آنها، همچنین با جمع و تفکیق این عبارت‌ها آشنا شدید. از آنجا که امسال، چند اتحاد دیگر را آموختید، در ادامه به یادآوری و تکمیل این مطالب می‌بردازیم. کسرهایی را که صورت و مخرج آنها چندجمله‌ای باشند، عبارت‌های گویا می‌نامند.

فعالیت



عبارت‌های گویا را با و عبارت‌های غیرگویا را با مشخص کنید.

$$\sqrt{x^2} + 1 \quad \square$$

$$\frac{1}{x^4 - \sqrt{2}} \quad \square$$

$$\frac{x - 3}{2x^2 - 3x + 5} \quad \square$$

$$\frac{x+y}{3\sqrt{z}} \quad \square$$

$$\frac{\sqrt{5}x}{x} \quad \square$$

$$x^2 + 3x - 4 \quad \square$$

$$\frac{x^r - 1}{x + 1} \quad \square$$

$$\sqrt{x} \quad \square$$

$$\frac{|x|}{x^2 + 2} \quad \square$$

مقدار یک عبارت گویا وقتی با معنا است که مخرجش صفر نباشد؛ یعنی در حالتی که مخرج یک عبارت گویا صفر شود، آنگاه مقدار عبارت گویا تعریف نشده است. برای مثال عبارت گویایی $\frac{x+2}{x-5}$ به ازای $x=5$ تعریف نشده است؛ زیرا با قراردادن $x=5$ در آن، مخرج کسر برابر با صفر می‌شود و در این حالت کسر تعریف نشده است.

کار در کلاس



کدام یک از عبارت‌های زیر گویا و کدام یک غیر گویا هستند؟ عبارت‌های گویا به ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

$$\frac{3z+5}{3z-5} \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x+9}{\sqrt{x}-3} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{4x^2-5x+1}{7\sqrt{2}} \quad (\text{پ})$$

$$\frac{a^2+3}{a^2-4} \quad (\text{ت})$$

$$\frac{x\sqrt{x}+1}{3-x} \quad (\text{ث})$$

$$\frac{5x^2+1}{x^2+1} \quad (\text{ج})$$

← → ← ساده کردن عبارت‌های گویا → → ←

اگر a و b عددهایی حقیقی باشند؛ به طوری که $b \neq 0$ در این صورت داریم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \quad (k, b \neq 0)$$

زیرا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $k \neq 0$ ، کسر را ساده کرده‌ایم:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{\cancel{k}a}{\cancel{k}\cancel{b}} = \frac{a}{b}$$

برای ساده کردن یک عبارت گویا، ابتدا باید صورت و مخرج آن را تجزیه کنیم، سپس با خط کشیدن روی عوامل مشترک از صورت و مخرج کسر، عبارت گویا ساده می‌شود. (یادآوری می‌کنیم، عامل مشترکی که از صورت و مخرج کسر خط می‌زنیم باید مخالف صفر باشد.)

کار در کلاس



۱. مانند نمونه‌های حل شده، کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\text{(الف)} \quad \frac{x^2+6x+9}{x^2-9} = \frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کرده‌ایم.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x+3)(x+3)}{(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{(x+3)}{(x-3)} \quad (\text{ساده شده کسر}) \end{aligned}$$

با شرط $x+3 \neq 0$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x+3)$ را خط زده‌ایم. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید $x-3 \neq 0$ باشد.

$$\text{ب) } \frac{x^r - 1}{x^s - 1} = \frac{(x-1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + 1)}{(x-1)(x^{s-1} + x^{s-2} + \dots + 1)}$$

صورت کسر را به کمک اتحاد تفاضل مکعب دو جمله‌ای و مخرج کسر را به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنید.

$$\begin{aligned} &= \frac{(x-1)(x^{r-1} + x^{r-2} + \dots + 1)}{(x-1)(x^{s-1} + x^{s-2} + \dots + 1)} \\ &= \quad \quad \quad \text{(ساده شده کسر)} \end{aligned}$$

با شرط $x \neq 1$ از صورت و مخرج کسر عامل $(x-1)$ را خط بزنید. توجه کنید که برای بامعنی بودن کسر باید $x+1 \neq 0$ باشد.

$$\text{ب) } \frac{x^4 - 8x}{2x^2 - 8x + 8}$$

۲. کسر زیر به صورت نادرست ساده شده است. ایراد آن را پیدا کنید و درباره آن توضیح دهید.

$$\frac{2x^r + y^r}{y^r} = \frac{\cancel{2x^r} + \cancel{y^r}}{\cancel{y^r}} = 2x^r + 1$$

۳. فرض کنیم $x=1$ است، داشتموزی با توجه به این فرض، ثابت کرده است که $\frac{x^r - 1}{x - 1} = 1$ است استدلال زیر را دنبال کنید و بگویید اشتباه در کجا اتفاق افتاده است.

$$x = 1$$

$$x^r = x$$

$$x^r - 1 = x - 1$$

$$\frac{x^r - 1}{x - 1} = \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}}$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1$$

$$x+1 = 1 \xrightarrow{x=1} 2 = 1$$

●●● جمع و تفریق عبارت‌های گویا

برای جمع و تفریق عبارت‌های گویا باید «مخرج مشترک» گیری کنیم. برای این منظور ابتدا با انجام فعالیت زیر مفهوم مخرج مشترک را درک می‌کنید؛ سپس در ادامه جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌آید.

فعالیت



چندجمله‌ای‌های $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ و $Q(x) = x^3 + 5x^2 - 2x + 1$ را در نظر بگیرید.

۱. چندجمله‌ای‌های بالا را تجزیه کنید.
۲. عبارت‌های مشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.
۳. عبارت‌های غیرمشترک در تجزیه این دو چندجمله‌ای را مشخص کنید.
۴. حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان را در عبارت‌های غیرمشترک پیدا کنید و آن را بنامید $A(x)$.
۵. عبارت‌های $\frac{A(x)}{Q(x)}$ ، $\frac{A(x)}{P(x)}$ را ساده کنید.
۶. با توجه به قسمت قبل آیا $A(x)$ مضرب مشترک دو عبارت $P(x)$ و $Q(x)$ است؟
۷. آیا می‌توانید مضرب‌های مشترک دیگری برای $P(x)$ و $Q(x)$ پیدا کنید؟
۸. از بین مضرب‌های مشترکی که برای $P(x)$ و $Q(x)$ یافتید، کدام یک کوچک‌ترین مضرب مشترک است؟

برای پیدا کردن کوچک‌ترین مضرب مشترک دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ ابتدا هریک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم؛ سپس حاصل ضرب عبارت‌های مشترک با بزرگ‌ترین توان در عبارت‌های غیرمشترک را به دست می‌آوریم و آن را $A(x)$ می‌نامیم. برای جمع یا تفریق دو عبارت گویا که مخرج‌های آنها $P(x)$ و $Q(x)$ باشند؛ عبارت $A(x)$ را مخرج مشترک دو کسر تعریف می‌کنیم.

کار در کلاس



۱. در هر قسمت کوچک‌ترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌های داده شده را به دست آورید.

(الف) $P(x) = x^2 + 6x + 9$

$$Q(x) = x^2 - 9$$

(ب) $P(x) = x^2 - 1$

$$Q(x) = x^2 - 1$$

۲. برای جمع و تفکیق عبارت‌های گویا، ابتدا مخرج مشترک می‌گیریم. در زیر، مخرج مشترک کسرهای مانند نمونه پیدا کنید.

(الف) $\frac{4}{x^2 + x} + \frac{1}{(x^2 - 1)(x + 1)}$

مخرج کسر اول $A(x) = x^2 + x = x(x+1)$

مخرج کسر دوم $B(x) = (x^2 - 1)(x+1) = (x-1)(x+1)^2$

مخرج مشترک $= x(x-1)(x+1)^2$

(ب) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x+1}{x+2}$

فعالیت



عبارت $P(x) = \frac{4}{x^2 + x} + \frac{x}{x^2 - 1}$ را در نظر بگیرید. با توجه به «کار در کلاس» قبل، مخرج مشترک این دو کسر برابر است با:

مخرج مشترک $= x(x-1)(x+1)$

$$P(x) = \frac{4}{x(x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

زیرا :

۱. مخرج کسر اول را با مخرج مشترک مقایسه کنید. برای اینکه مخرج کسر اول مانند مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر اول را در چه عبارتی ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{4}{x(x+1)} = \frac{4}{x(x+1)} \cdot \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

۲. برای اینکه مخرج کسر دوم مخرج مشترک شود، باید صورت و مخرج کسر دوم را در کدام عبارت ضرب کرد؟ این کار را انجام دهید.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \underline{\hspace{10em}}$$

۳. همان طور که می بینید، مخرج کسرهای اول و دوم یکسان شده اند. در زیر، این دو کسر را با هم جمع کرده ایم، جای خالی را پُر کنید.

$$P(x) = \frac{4(x-1)+x^2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

کار در کلاس



حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

(الف) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

می دانیم مخرج مشترک این دو کسر برابر است با: $(x-1)(x+1)$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{x^2-1}$$

(ب) $\frac{y+\lambda}{y^2+y-2} + \frac{y-\gamma}{y^2+2y} = \frac{y+\lambda}{(y+2)(y-1)} + \frac{y-\gamma}{y(y+2)}$

$$= \frac{y(y+2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)} + \frac{y(y+2)(y-1)}{y(y+2)(y-1)}$$

(پ) $\frac{4+x^2-2x}{2+x} - x - 2$

(ت) $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} - \frac{2x-3}{2x+2}$

تمرین



۱. عبارت‌های گویای زیر به‌ازای چه مقادیری از متغیرها تعریف نشده‌اند؟

(الف) $\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}$

(ب) $\frac{2x^3 + 1}{x^3 + 4}$

(پ) $\frac{5}{x^3 + x}$

(ت) $\frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x(x+1)(x^3 - 4)}$

(ث) $\frac{3x^2y + 6xy^2}{x^3}$

(ج) $\frac{42a^3 - 30a^3}{a^3 - 25a}$

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

(الف) $\frac{4}{9x} - \frac{5x}{9y^2} + 1$

(ب) $\frac{x+1}{x-1} - 1$

(پ) $\frac{\frac{1}{m} + 1}{m+1}$

(ت) $\frac{2x}{x^2 - y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

(ث) $\frac{x+3}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x+2}{x^2 - 9} - \frac{5}{3-x}$

(ج) $\frac{y-3}{y^2 - 4} - \frac{y+2}{y^2 - 4y + 4} - \frac{2}{2-y}$

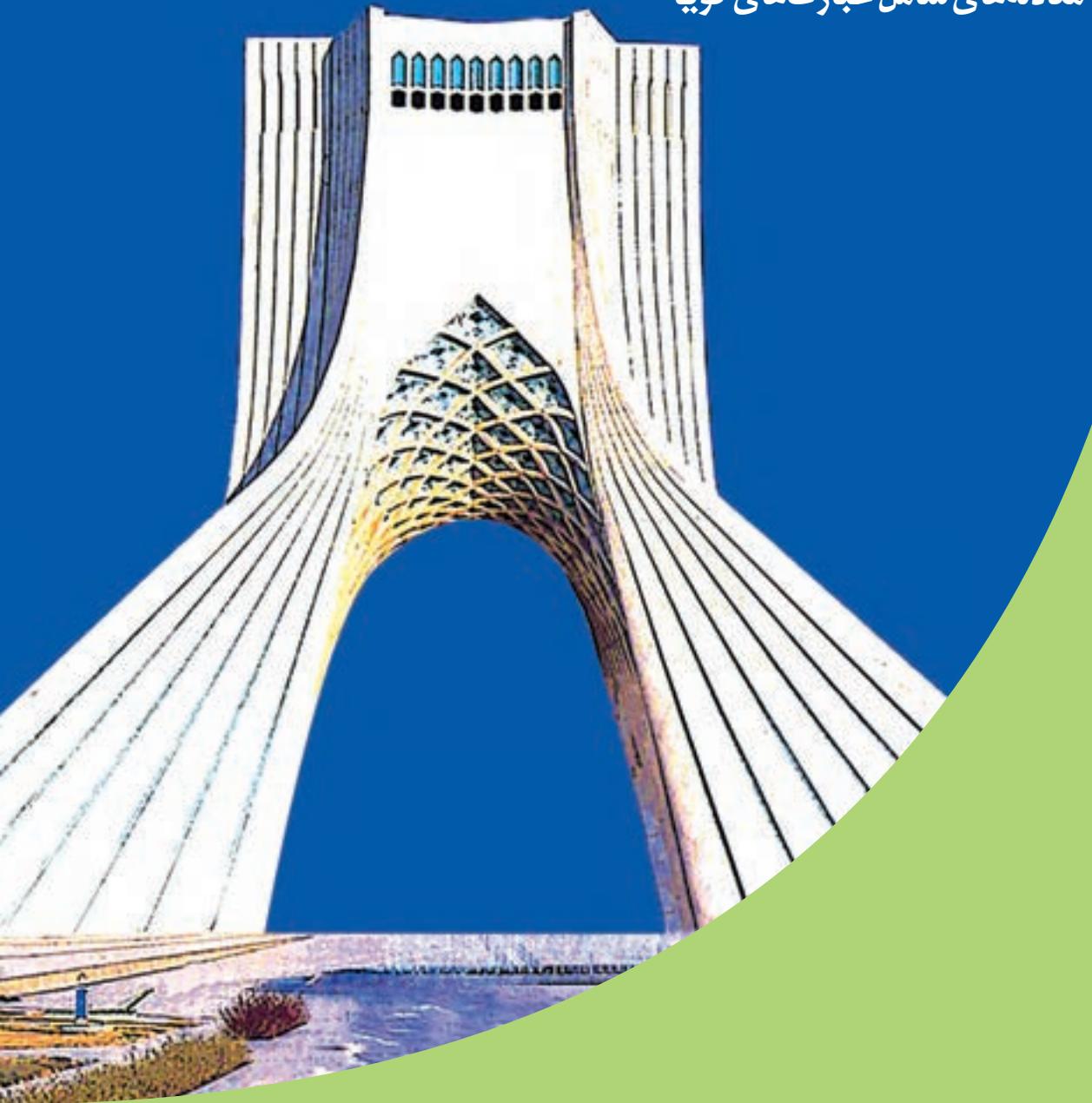
فصل دوم

معادله درجه دوم

درس ۱ معادله و مسائل توصیفی

درس ۲ حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس ۳ معادله های شامل عبارت های گویا



درس ۱

معادله و مسائل توصیفی

معادله $1 = 2x + 4$ را در نظر می‌گیریم. این معادله به ازای $x = 2$ به یک تساوی عددی تبدیل می‌شود.
 $x = 2$ را جواب معادله یا ریشهٔ معادله می‌نامند.

فعالیت



با توجه به شکل زیر یک معادله طرح کنید و ریشهٔ آن را بیابید.



فعالیت



عددی را بباید که دو برابر آن به علاوهٔ عدد یک، برابر با پنج برابر همان عدد منهای چهار باشد.

جواب : عدد مورد نظر را x در نظر می‌گیریم. با توجه به فرض :

دو برابر آن عدد به علاوهٔ عدد یک معادل $1 + 2x$ و پنج برابر همان عدد منهای عدد چهار، معادل $4 - 5x$ است که باید با یکدیگر برابر باشند، یعنی :

$$1 + 2x = \dots \dots \dots$$

با بردن جملات شامل x به یک طرف تساوی و بردن اعداد ثابت به طرف دیگر تساوی :

$$5x - 2x = 1 + 4 \Rightarrow 3x = 5$$

و با تقسیم هر طرف تساوی بر عدد سه، جواب معادله به دست می‌آید :

$$x = \frac{5}{3}$$

هر معادله به صورت $ax+b=0$ را که در آن a و b اعداد حقیقی و a مخالف صفر است، یک معادله درجه اول می‌نامند.
تنها جواب این معادله از $x = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (چرا؟)

کار در کلاس

یک حواصیل خاکستری دسته‌ای از حواصیل‌های سفید را در جنگل حرا* در جزیره قشم دید. به یکی از آنها گفت: اجازه می‌دهید من هم در گروه شما باشم و با شما پرواز کنم؟



یکی از آنها پاسخ داد: اگر معمای زیر را حل کنی، تو هم در گروه ما خواهی بود و ادامه داد:
«ما و ما و نصف ما و نصفه‌ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی صد می‌شویم». لطفاً به پرنسه کمک کنید تا تعداد پرندگان گروه را تعیین کند و عضوی از گروه آنها باشد.
اگر «ما» را x فرض کنیم:

$$\begin{aligned} & \text{ما} + \text{نصف ما} + \text{نصف نصف ما} + \text{نصف نصف نصف ما} = 100 \\ & x + \dots + \frac{1}{2}x + \dots + 1 = 100 \\ & \dots \Rightarrow x = \dots \end{aligned}$$

آیا معادله به دست آمده، درجه اول است؟ چرا؟
ضرایب a و b کدام‌اند؟

* شرحی از موقعیت و شرایط این جنگل در صفحه بعد آمده است.



* جنگل حرا، جزیره قشم

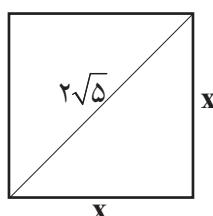
حرا درختی است که بیشتر در آب‌های جنوبی ایران می‌روید. در این میان جنگل‌های همیشه سبز دریابی حرا از این درختان زیبا تشکیل شده است. این جنگل‌ها در حاشیه شمال غربی قشم از زیباترین گردشگاه‌هایی است که همچون نگینی در بهنه نیلگون خلیج فارس چشم‌ها را می‌نوازد و دوستداران طبیعت را به تماشای خوش فرامی‌خواند. این جنگل‌های سبز مامن بیش از ۲۲° پرندۀ بومی و مهاجر است. حواصیل سفید و خاکستری دو گونهٔ زیبا از این پرنده‌گان‌اند.



یادی از گذشته



فعالیت کتاب نهم صفحه ۷۳



- محیط مربعی را به دست آورید که قطر آن $2\sqrt{5}$ باشد.

به کمک رابطهٔ فیثاغورث داریم :

$$\dots + \dots = (2\sqrt{5})^2$$

بنابراین :

$$4x^2 = \dots \Rightarrow x^2 = \dots \Rightarrow x = \dots$$

پس اندازهٔ هر ضلع مربع با در نظر گرفتن اینکه اندازهٔ ضلع مثبت است، برابر x است و محیط مربع فوق برابر است با:

$$p = 4x \Rightarrow p = \dots$$

معادلهٔ $2x^2 = 20$ را یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌نامیم.

فعالیت



۱. عددی را باید که مربع آن، ۳ برابر خود همان عدد باشد.
اگر عدد مورد نظر x فرض شود، مربع همان عدد برابر x^2 و سه برابر همان عدد برابر $3x$ است که باید دو عبارت با یکدیگر برابر باشند. یعنی :

$$\dots \dots = 3x$$

جواب‌های این معادله را می‌توانید حدس بزنید؟ آیا این معادله بیش از یک جواب دارد؟
از میان مقادیر زیر کدام یک می‌تواند جواب معادله باشد؟ چرا؟

$$x=3, \quad x=4, \quad x=-3, \quad x=1, \quad x=0$$

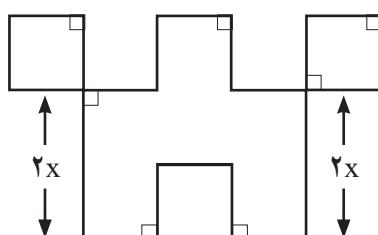
به جز روش حدس، برای حل معادله فوق از روش تجزیه نیز می‌توانیم استفاده کنیم:
 $x^2 = 3x \Rightarrow x^2 - 3x = 0, \quad x(x-3) = 0 \Rightarrow x = \dots \dots \text{ یا } x = 0$



یادآوری :
اگر $a \times b = 0$ باشد
نتیجه می‌گیریم :
 $b = 0$ یا $a = 0$

معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل
 $ax^2 + bx + c = 0$ است که در آن ضریب x^2 ،
ضریب x و c عدد ثابت است.

۲. در شکل زیر طول تمام پاره خط‌ها به جز دو پاره خط مشخص شده در شکل برابر x است. اگر اندازه مساحت شکل برابر با اندازه محیط آن باشد، مقدار x را به دست آورید.



$$\text{اندازه محیط شکل} = \text{اندازه مساحت شکل} \Rightarrow \dots \dots = \dots \dots$$

کار در کلاس



نیما از پسرعمویش کیان، سه سال بزرگ‌تر است. اگر حاصل ضرب سن این دو 4° باشد، پسرعموی کوچک‌تر چند سال دارد؟

اگر سن نیما برابر x باشد، طبق فرض مسئله، سن کیان برابر است. بنابراین:

$$x \times (.....) = 4^{\circ}$$

آیا می‌توانید جواب‌های معادله فوق را حدس بزنید؟ این معادله از درجه چند است؟

این معادله چند جواب دارد؟ آیا عدد منفی هم در معادله صدق می‌کند؟ این جواب در این سؤال معنی دارد؟

تمرین



۱. هر کدام از عبارت‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

الف) عددی را باید که پنج برابر آن به علاوه دو مساوی با سه برابر آن عدد منهای دو باشد.

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

۲. در یک کارخانه، حقوق یک مهندس دو برابر یک فنورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه 3 مدیر بخش، 8 مهندس و 12 فنورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه $55/5$ میلیون تومان حقوق برداخت می‌کند. حقوق یک فنورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

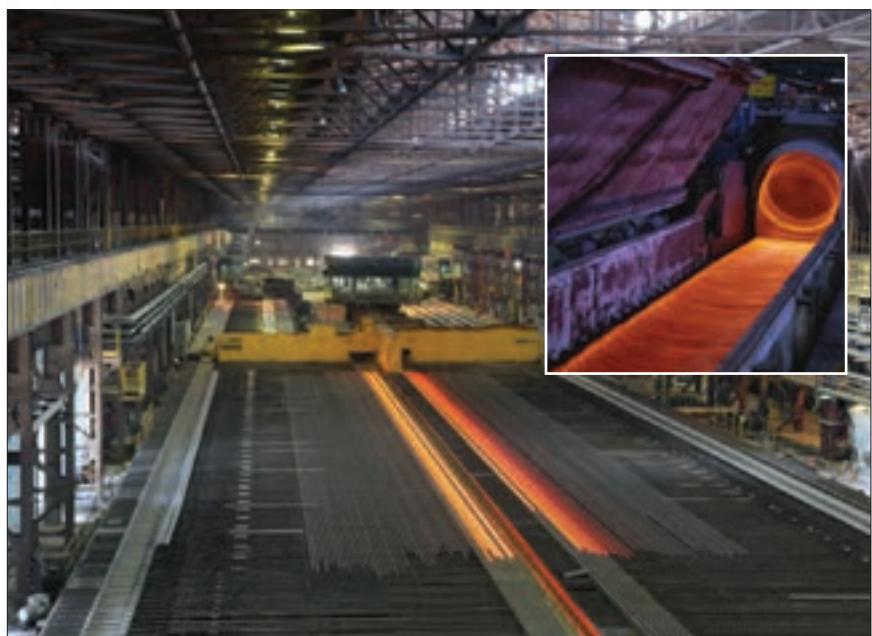


۳. با توجه به پیش‌بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان، از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف 64 هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟

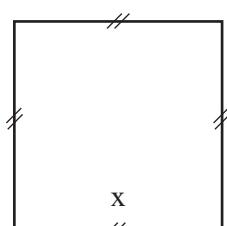
اختلاف تولید فولاد در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

کارخانه ذوب آهن اصفهان

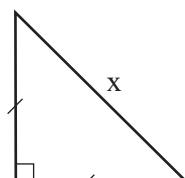
ذوب آهن اصفهان به عنوان یک صنعت مهم و مادر، در سال ۱۳۴۶ در دشت طبس، واقع در ۴۵ کیلومتری جنوب غربی شهر اصفهان، تأسیس و در سال ۱۳۵۰ با ظرفیت محصولات فولادی ۵۵ هزار تن در سال، به بهره‌برداری رسید. این کارخانه هم‌اکنون با تلاش شبانه‌روزی مسئلان و کارمندان آن به ظرفیت تولید بیش از ۲ میلیون تن محصولات فولادی و محصولات متنوع دیگر رسیده است. این کارخانه کمکی شایان به ساختن زیربنای کشور عزیzman، ایران اسلامی دارد.



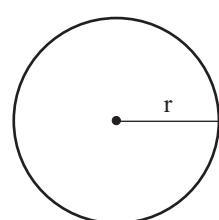
۴. اگر مجموع مساحت‌های سه شکل زیر برابر ۷ باشد، طول ضلع مربع چقدر است؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$$r = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x$$

←→←→ بازی با حروف الفبا به کمک مدل سازی ریاضی (رمزنگاری) →→→

۵. حروف الفبای فارسی از «الف» تا «ی» را به ترتیب از ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده‌ایم. هر حرف بدون نقطه با شماره آن حرف از ۱ تا ۳۲ مشخص می‌شود. حروف نقطه دار به صورت ax^n مشخص شده‌اند که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقاط حرف مورد نظر است. به عنوان مثال حرف «ح» با عدد ۸ مشخص می‌شود؛ زیرا هشتین حرف الفبای فارسی است و حرف «ت» با عبارت $4x^2$ مشخص می‌شود؛ زیرا چهارمین حرف الفباست ($a=4$) و دارای دو نقطه است ($n=2$).

در این روش برای نوشتند کلمات از علامت جمع به صورت زیر استفاده می‌کنیم.
مثالاً برای معادل ریاضی کلمه «غنجه» :

$$\text{غنجه} : \begin{matrix} \text{غ} & + & \text{ن} & + & \text{ج} & + & \text{ه} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \end{matrix}$$

$$31 + 7x^3 + 29x + 22x$$

$$\xrightarrow{\text{معادل ریاضی}} 22x + 29x + 7x^3 + 31$$

حال با توجه به توضیح فوق :

الف) جدول زیر را کامل کنید :

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
	آب
$3x^3 + 1$	
	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه «پیامبر رحمت» را مشخص کنید.

پ) آیا می‌توانید با این روش نام خود را با رمز ریاضی بیان کنید؟

ت) با الگوی فوق یک پیام کوتاه برای دوست خود بنویسید.

۱	الف
۲	ب
۳	پ
۴	ت
۵	ث
۶	ج
۷	چ
۸	ح
۹	خ
۱۰	د
۱۱	ذ
۱۲	ر
۱۳	ز
۱۴	ژ
۱۵	س
۱۶	ش
۱۷	ص
۱۸	ض
۱۹	ط
۲۰	ظ
۲۱	ع
۲۲	غ
۲۳	ف
۲۴	ق
۲۵	ک
۲۶	گ
۲۷	ل
۲۸	م
۲۹	ن
۳۰	و
۳۱	ه
۳۲	ی

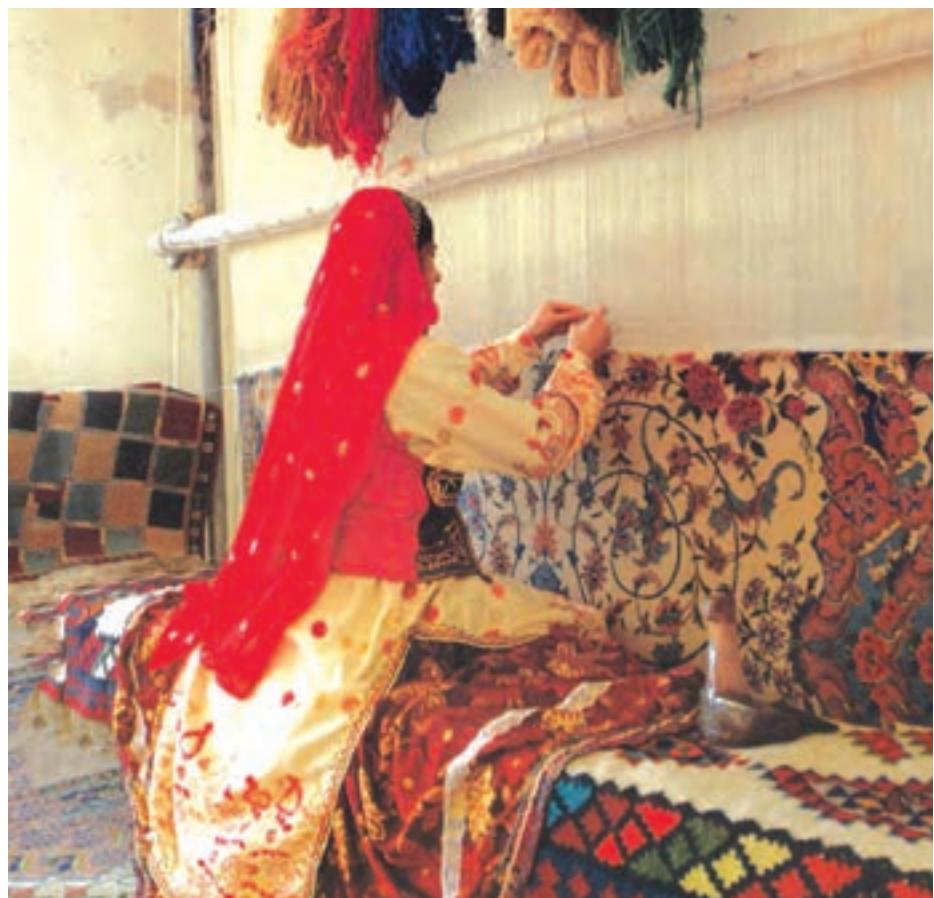
۶. اگر در یک قالی با ابعاد $2\text{m} \times 1\text{m}$ (که عوماً $3\times 8\text{cm}$ نامیده می‌شود) تعداد گره‌های قالی $5/880/000$ عدد باشد :

الف) این قالی چند رج^۱ است؟

ب) اگر برای هر گره 1cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود، در این قالی چند متر نخ قالی استفاده شده است؟

پ) یک قالی باف حرفه‌ای در یک روز می‌تواند 6000 گره قالی بیافد. اگر این قالی باف 5 روز در هفته کار کند، برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و پود، نخ قالی و ... پنج میلیون و شش صد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آنرا به قیمت 35 میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟



۱. «رج قالی» عبارت است از تعداد گره‌های قالی در 7cm طول یا عرض قالی. به عنوان مثال منظور از یک قالی 5° رج، وجود 5 گره در یک ضلع مربع 7×7 است.

صنعت قالی بافی

یکی از قدیمی‌ترین و زیباترین هنرهای دستی مردم ایران، هنر قالی‌بافی است. در این حرفه به نخی که قالی با آن بافته می‌شود خامه قالی (خومه) می‌گویند. این نخها بر روی رشته‌های نخ افقی و قائمی بافته می‌شوند که به این رشته‌ها تارو پود قالی می‌گویند. عموماً ارزش یک قالی به اصالت نقشه آن، قدمت قالی، بافتندۀ قالی و تعداد گره‌های قالی و جنس تارو پود قالی است.



درس ۲

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

برخلاف آنچه در «کار در کلاس‌های درس اول» دیدیم، در حالت کلی ممکن است توانیم جواب‌های معادله درجه ۲ را حدس بزنیم.
در این درس با سه روش برای حل معادله درجه ۲ آشنا می‌شویم.

روش اول: تجزیه عبارت‌های جبری

در سال قبل و در فصل اول این کتاب با مفهوم اتحاد و نیز با چند اتحاد جبری آشنایی شدید و استفاده از این اتحادها را در تجزیه عبارت‌های جبری آموختید. تعدادی از این اتحادها را برای حل معادله‌های درجه دو به کار خواهیم برد. برای یادآوری، این اتحادها را مرور می‌کنیم:

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله‌ای:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اتحاد جمله مشترک:

فعالیت



طرف دوم تساوی‌های زیر را به کمک اتحادهای خوانده شده کامل کنید:

$$(الف) \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{1}{4}$$
$$(ب) (2 + \dots)^2 = \dots + 12xy + \dots$$

$$(پ) (x - 2y)(\dots + \dots) = x^2 - 4y^2$$
$$(ت) x^2 - \dots + 12 = (x - 6)(x - 2)$$

$$(ث) \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \dots + \dots + \frac{9}{4}$$

فعالیت



مطابق نمونه، اتحاد جبری پیشنهادی در ستون اول را که مناسب برای حل معادله درجه دوم در ستون بعدی است، با یک خط به یکدیگر وصل کنید. سپس معادله فوق را در ستون آخر حل کنید.

ستون اول

ستون دوم

ستون سوم

اتحاد مربع تفاضل
دو جمله

عامل یابی
(فاکتور گیری)

اتحاد
جمله مشترک

اتحاد مربع مجموع
دو جمله

اتحاد مزدوج
و روش ریشه‌گیری

$x^2 + 6x = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 0$

$x^2 - 16 = 0$

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$$x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(x+6) = 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -6$$

پس معادله دوریشه حقیقی متمایز دارد.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = 0 \Rightarrow \\ (x+3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ یا } x = -3$$

روش ۱ :

$$x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (x-4)(.....) = 0 \\ \Rightarrow x = \text{ یا} \\ x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow ... \text{ روش ۲ :}$$

$(x+3)(.....) = 0$



در یک معادله درجه ۲، اگر دوریشه، باهم برابر باشند، اصطلاحاً می‌گوییم، معادله ریشه مضاعف دارد.

۱. با توجه به معادله‌های فوق در حالت کلی در معادله درجه دوم :

الف) اگر $c = 0$ از کدام روش بالا استفاده می‌کنید؟

ب) در چه صورتی از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنید؟

پ) برای حل معادله درجه دو به کمک اتحاد مزدوج یا ریشه‌گیری، b در چه شرطی صدق می‌کند؟ آیا علامت‌های a و c مهم است؟

ت) در کدام یک از اتحادهای فوق جواب معادله، ریشه مضاعف محسوب می‌شود؟

۲. آیا می‌توانید معادله درجه دومی بنویسید که جواب نداشته باشد؟ دو نمونه آن را مشخص کنید.

کار در کلاس



با استفاده از اتحادهای صفحه قبل معادله‌های زیر را حل کنید:

$$1) x^2 + 2x - 4 = 0$$

از اتحاد یک جمله مشترک، تساوی را تجزیه کنید:

$$\Rightarrow (x \dots)(x \dots) = 0$$

$$\Rightarrow (x - \dots) = 0 \text{ یا } (x \dots) = 0 \Rightarrow x = \dots \text{ یا } x = \dots$$

$$2) 4x^2 - (2-x)^2 = 0$$

با استفاده از اتحاد ... عبارت جبری سمت چپ تساوی را تجزیه می‌کنیم:

$$(2x - (2-x))(2x + (2-x)) = 0 \Rightarrow \dots$$

تمرین



۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $2x^2 - 8 = 0$

(ب) $(x+2)(x-3) = x - 3$

(پ) $x^2 - 2x = 0$

(ت) $x^2 = x - \frac{1}{4}$

(ث) $2x^2 - 8x = 0$

(ج) $x^2 - 5x + 6 = 0$

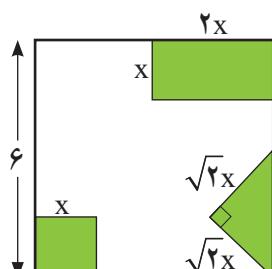
(ح) $\frac{x^2}{3} = x$

(خ) $x^2 = 5 - x^2$

(ذ) $x^2 + 4x + 4 = 0$

(د) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

(ذ) $(x-3)^2 = 4$



۲. از مربعی به ضلع 6 cm سه شکل رو به رو بریده شده است. مساحت باقی‌مانده 24 cm^2 است. طول ضلع کوچک بریده شده چقدر است؟

۳. معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=-3$ جواب‌های آن باشد.

۴. معادله درجه دومی بنویسید که x ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

۵. در معادله $K = (x-1)^2$:

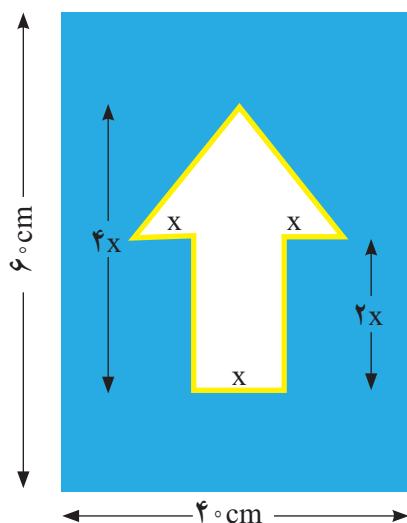
(الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=4$ ، $K=2$ و $K=-9$ به دست آورید.

(ب) به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه مضاعف دارد؟

(پ) به ازای چه مقادیری از K معادله دو ریشه حقیقی دارد؟

(ت) به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه حقیقی ندارد؟

۶. برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل، مطابق شکل زیر از برچسب‌های آبی و سفید استفاده می‌شود. هزینه 1 cm^2 برچسب سفید 30 تومان و هزینه 1 cm^2 برچسب آبی 10 تومان است. مجموع هزینه برچسب‌های سفید و آبی 2700 تومان شده است.



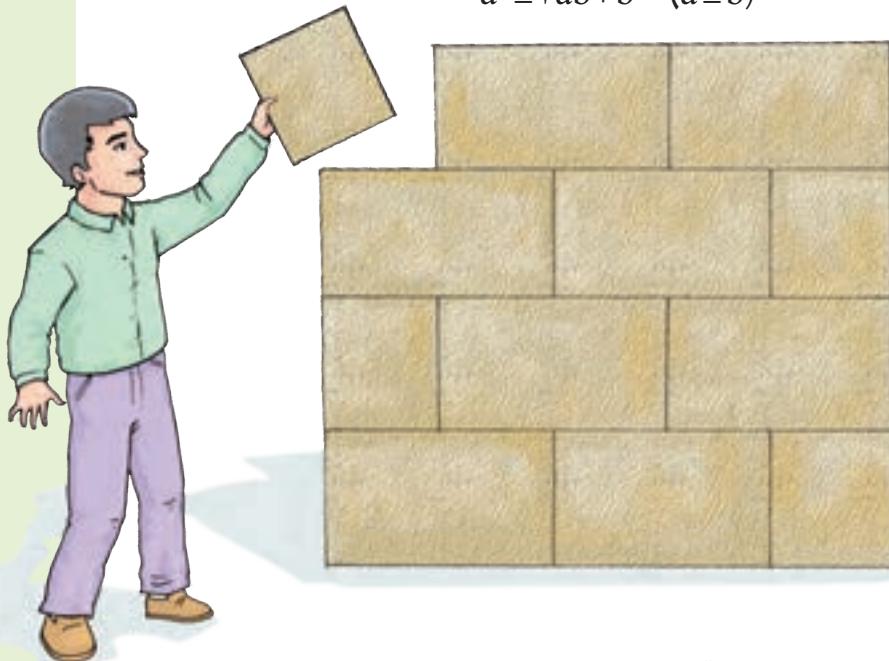
(الف) اندازه x چقدر است؟

(ب) اگر در این تابلوی راهنمایی، مطابق شکل رو به رو علاوه بر چسب سفید و آبی از خطوط برچسب شبرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm^2 آن 100 تومان است، هزینه رنگ آمیزی تابلو 34800 تومان می‌شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟



روش دوم : مربع کامل

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$



مثال: معادله درجه دوم $2x^2 + 3x - 5 = 0$ را حل کنید.

۱ ابتدا قرینه عدد ثابت معادله؛ یعنی ۵ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$2x^2 + 3x = \quad (1)$$

۲ اگر ضریب x مخالف ۱ باشد، دو طرف معادله را به ضریب x تقسیم می‌کنیم. بنابراین، در معادله بالا دو طرف تساوی را برابر عدد تقسیم می‌کنیم:

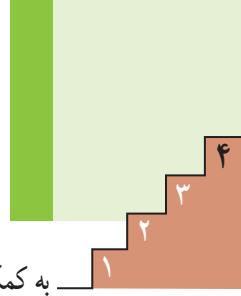
$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2} \quad (2)$$

۳ در عبارت $x^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ با در نظر گرفتن اتحاد مربع دو جمله‌ای $(a+b)^2$ برای ایجاد جمله $2ab$ ، $\frac{3}{2}$ را در عدد 2 ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{3}{2}x = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x = 2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}x \right) = 2 \times \frac{3}{4}x$$

- سپس مربع عدد $\frac{3}{4}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 \quad (3)$$



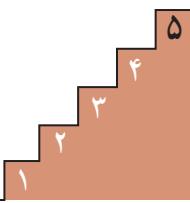
— به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای سمت چپ تساوی (۳) را به $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = (x + \frac{3}{4})^2$$

a^2 $b \times a$ b^2 $(a+b)^2$

بنابراین:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16} \rightarrow (x + \frac{3}{4})^2 = \frac{49}{16} \quad (4)$$



— با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی، مقدار x به دست می‌آید:

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{یا} \quad x = -\frac{3}{4} - \frac{7}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$$

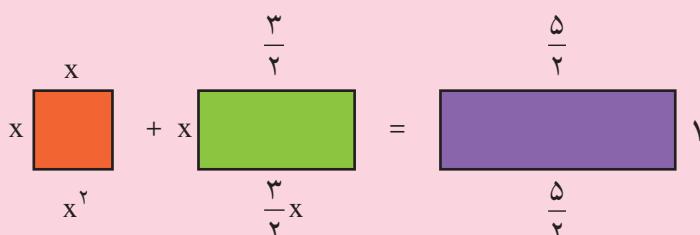
پس جواب‌های معادله $= 5 - 2x^2 + 3x = 0$ یا همان ریشه‌های معادله، دو عدد حقیقی

$$x = -\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad x = 1$$

مراحل حل معادله ذکر شده را از پله دوم به بعد به کمک تعبیر هندسی زیر نیز می‌توان بیان کرد:

خواندنی

- اگر x را مساحت مربعی به ضلع x و $\frac{3}{2}x$ را مساحت مستطیلی به طول $\frac{3}{2}$ و عرض x در نظر بگیریم:



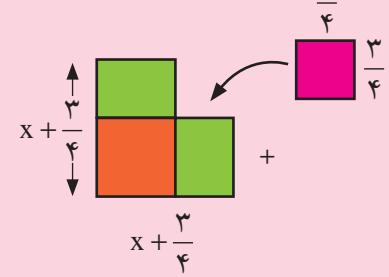
- با نصف کردن مستطیل به طول $\frac{3}{2}$ در تساوی (۱) و تبدیل آن به دو مستطیل به طول در تساوی (۲):

$$x^2 + (\frac{3}{4} + \frac{3}{4})x = x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4}$$

و قرار دادن ۲ مستطیل قبل در کنار مربع x^2 ، تساوی صفحه قبل به صورت زیر در می آید:

$$x^2 + x \cdot \frac{3}{4} + x \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

- شکل سمت چپ برای آنکه به یک مربع کامل تبدیل شود نیاز به مربعی به ضلع دارد.



با اضافه کردن آن به ۲ طرف تساوی:

$$(x + \frac{3}{4})^2 = \underbrace{\frac{5}{2}}_{\frac{5}{2} + \frac{9}{16} = \frac{49}{16}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$$

که مطابق حل صفحه قبل معادله دارای ۲ جواب $x = -\frac{5}{2}$ و $x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}$ است. البته در روش هندسی فوق چون x طول ضلع است، جواب $x = -\frac{5}{2}$ معنی پیدا نمی کند.

شیوه حل معادله درجه دو به روش هندسی ذکر شده اولین بار توسط ریاضی دان، منجم، مورخ و جغرافی دان ایرانی و مسلمان «ابو عبدالله محمد بن موسی خوارزمی» در کتاب جبر و مقابله در بخش اول کتاب در اوخر قرن دوم هجری مطرح شد. سؤال قبل که صورت کلی آن $q + px = x^2$ با فرض $p, q > 0$ است، یکی از شش حالت خاصی است که خوارزمی برای حل معادله درجه دو در این کتاب مطرح و حل کرده است. هرچند همه معادله های درجه دو را نمی توان با این شش روش حل کرد؛ اما بیان مسائل هندسی در قالب جمله های جبری در این کتاب بنای اصلی توسعه نظریه جبری معادله ها است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی قرن ها مرجع و مأخذ اروپاییان و تاقرنسازدهم میلادی مبنای مطالعات علمی آنان بوده است. این کتاب که به زبان عربی نوشته شده است، در قرن ۱۲ میلادی دوباره توسط «جراهد کرمونی» و «رابرت چستری» به زبان لاتین ترجمه شده است. این ترجمه ها را می توان آغاز علم جبر در اروپا دانست. همچنین در سال ۱۸۳۱ میلادی نیز «فردریک رزن» این کتاب را بار دیگر از زبان عربی به زبان انگلیسی ترجمه کرده است. گفتنی است که یک نسخه خطی این کتاب در دانشگاه آکسفورد و نسخه خطی دیگر آن در قاهره موجود است.

کار در کلاس



با محاسبه مجموع زمان طی کردن پله‌های زیر برای مراحل حل معادله درجه دو، در چند ثانیه می‌توانید به بالای پله برسید؟ بهترین نتیجه بدست آمده در کلاس چند ثانیه با عملکرد شما اختلاف دارد؟

تمرین قبل از مسابقه

$$1) 2x^2 - 6x - 1 = 0$$

$2x^2 - 6x = 1$	$x^2 - 3x = \frac{1}{2}$ $x^2 - 2 \times \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$ \downarrow $(\frac{-3}{2})^2 = \frac{9}{4}$ $x^2 - 2(\frac{-3}{2}x) + \frac{9}{4} = \frac{1}{2} + \frac{9}{4}$	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{11}{4}$ $x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$ $\begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2} \\ x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2} \end{cases}$
-----------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$2) 3x^2 - 2 = 6x$$

$3x^2 - 6x = \dots$	$x^2 - \dots = \dots$ $\dots = \dots$ $\dots = \dots$ $(\)^2 = \dots$	$\dots = \dots$ $\begin{cases} x = \dots \\ x = \dots \end{cases}$
---------------------	---------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------

مسابقه



تمرین



معادله‌های درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

$$(الف) x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(پ) x^2 + \frac{1}{4} = -x$$

$$(ب) 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(ت) x^2 + 6x + 9 = 0$$

روش سوم : روش کلی حل معادله درجه دوم

با استفاده از روش مربع کامل برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ روش کلی برای حل معادله به دست می‌آید. با مرور پله‌های گفته شده در بخش قبل :

۱ قرینه عدد ثابت معادله را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$ax^2 + bx = -c \quad (۱)$$

۲ دو طرف معادله را به ضریب x^2 یعنی a تقسیم می‌کنیم:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (۲)$$

۳ ضریب $\frac{b}{a}$ را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم و مربع عدد به دست آمده؛ یعنی $\frac{b}{2a}$ را به دو طرف تساوی (۲) اضافه می‌کنیم:

$$x^2 + 2(\frac{b}{2a})x = -\frac{c}{a} \Rightarrow x^2 + 2(\frac{b}{2a})x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a} \quad (۳)$$

۴ عبارت سمت چپ تساوی (۳) را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

۵ با شرط $b^2 - 4ac > 0$ و با استفاده از ریشه‌گیری از ۲ طرف تساوی:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

عبارت $b^2 - 4ac$ را میین معادله درجه دوم می نامند و آن را با Δ نشان می دهند.

براساس علامت Δ می توان در وجود و تعداد ریشه های معادله درجه دوم اظهار نظر کرد:

الف) اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دارای ۲ جواب است که عبارت اند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دارای یک جواب است. (در این حالت این ریشه را ریشه مضاعف می نامند).

$$x = -\frac{b}{2a}$$

پ) اگر $\Delta < 0$ باشد معادله جواب ندارد. (چرا؟)

فعالیت



۱. جواب های معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با توجه به ضرایب معادله، به ترتیب: $c = 2$ و $b = -3$ و $a = 1$ است.
بنابراین:

$$\Delta = b^2 - \dots \Rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

$\Delta > 0$ پس معادله دارای ۲ جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = 2 \quad \text{یا} \quad x = 1$$

۲. جواب های معادله $4x^2 + 7x - 2 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن ...
 $a = \dots \quad b = \dots \quad c = \dots$

$$\Delta = \dots \dots \Rightarrow \Delta = 49 - 4 \times 4 \times (-2) = 81$$

$\Delta > 0$ و معادله دارای دو جواب است:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{81}}{2 \times 4} = \frac{-7 \pm 9}{8} \Rightarrow$$

۱. Δ چهارمین حرف الفبای یونانی است که آن را «دلتا» می خوانند. در الفبای یونانی، دلای بزرگ را با علامت Δ و دلای کوچک را با علامت δ نشان می دهند.

۳. جواب‌های معادله $3x^2 + x + 7 = 0$ را در صورت وجود به دست آورید.

حل : با در نظر گرفتن $a=3$ $b=1$ $c=7$

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \dots \dots \dots$$

$\Delta < 0$ بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.



کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید و با به دست آوردن ریشه‌های معادله، x_1 و x_2 حاصل $x_1 + x_2$ را به دست آورید.
آیا ارتباطی میان مجموع ریشه‌ها و ضرایب a, b و c در معادله درجه دو گفته شده وجود دارد؟

(الف) $2x^2 + 5x - 2 = 0$

(ب) $4x^2 + 3x - 7 = 0$

طرح و حل دو مسئله کاربردی از معادله درجه دوم

مسئله اول :

مقدمه : در هر مسئله اقتصادی اگر x مقدار یا تعداد محصول باشد، سه رابطه مهم زیر تعریف می‌شوند:

رابطه هزینه (cost) یا $C(x)$: هزینه تولید x واحد کالا

رابطه سود (profit) یا $P(x)$: سود حاصل از فروش x واحد کالا

رابطه درآمد (Revenue) یا $R(x)$: درآمد حاصل از فروش x واحد کالا

ارتباط میان ۳ رابطه فوق به صورت زیر است:

$$P(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow \text{سود} = \text{درآمد} - \text{هزینه}$$

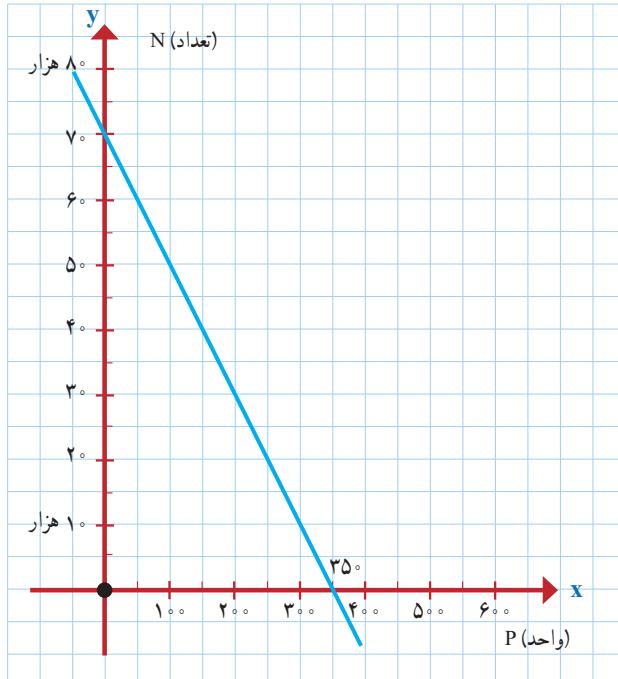


فرض کنید یک دوچرخه جدید ورزشی طراحی کدهاید که می‌خواهد آن را به تولید انبوه برسانید. هزینه‌های شما شامل ۲ بخش است :

(الف) ۷۰۰,۰۰۰ (واحد) برای راهاندازی کارگاه و خرید تجهیزات و تبلیغات و ... (هزینه اولیه)

(ب) ۱۱۰ (واحد) برای ساخت هر دوچرخه (هزینه تولید)

با توجه به اطلاعات آماری تولید دوچرخه‌های مشابه در بازار، انتظار شما از تعداد فروش این دوچرخه با توجه به قیمت فروش آن از نمودار زیر پیروی می‌کند:



اگر N تعداد فروش دوچرخه و P قیمت هر دوچرخه تعیین شده باشد با توجه به نمودار فوق، رابطه زیر میان N و P برقرار است:

$$N = 70,000 - 200P$$

این تساوی به این معنی است که اگر:

– قیمت دوچرخه صفر واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر $70,000$ دوچرخه است.

– قیمت دوچرخه 350 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه صفر عدد است.

– اگر قیمت دوچرخه 300 واحد تعیین شود، تعداد فروش دوچرخه برابر است با

$$N = 70,000 - 200P = 70,000 - 200 \times 300 = 10,000$$

با توجه به اطلاعات فوق، الف) رابطه سود این کارخانه بر حسب قیمت تعیین شده یک دوچرخه را مشخص کنید.

حل:

$$\text{درآمد کارخانه} = \text{قیمت هر دوچرخه} \times \text{تعداد فروش دوچرخه} = (70,000 - 200P)P = 70,000P - 200P^2$$

$$\text{هزینه تولید} + \text{هزینه اولیه} = \text{هزینه کارخانه}$$

$$= 700,000 + 110(70,000 - 200P) = 700,000 + 7,700,000 - 22000P$$

$$= 8,400,000 - 22,000P$$

هزینه کارخانه - درآمد کارخانه = سود کارخانه

$$= 70,000P - 20,000P^2 - (8,400,000 - 22,000P)$$

$$\Rightarrow \text{سود کارخانه} = -200(P^2 - 460P + 42,000)$$

مسئله دوم :

در یک کارگاه تولید چتر، سود حاصل از فروش x چتر از رابطه $p(x) = -0.00405x^2 + 8/15x - 100$ به دست می‌آید.



(الف) اگر این کارگاه چتری نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

(ب) نقطه سر به سر (break-even) میزانی از تولید یک بنگاه اقتصادی را نشان می‌دهد که در آن میزان هزینه‌ها با میزان درآمدها برابر می‌شود و بنگاه در این سطح از تولید نه سود می‌کند و نه ضرر.

در مثال بالا به ازای چه تعداد فروش چتر، کارگاه به نقطه سر به سر خود می‌رسد؟

تمرین



۱. معادله‌های درجه دوم زیر را حل کنید.

$$1) x^2 - x = 0$$

$$2) 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$3) 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$4) x^2 + 17x - 18 = 0$$

$$5) 3x^2 - x + 4 = 0$$

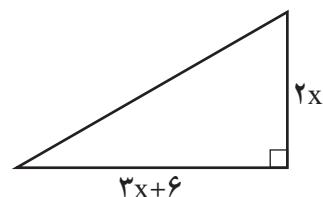
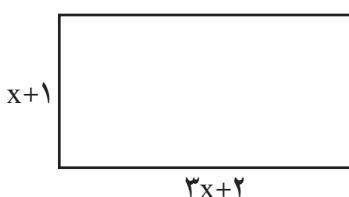
$$6) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$$

۲. معادله $= 2x^2 - 3x - 5$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را

به دست آورید.

۳. اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۴. مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



۵. کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

(الف) $x^2 + ax - 1 = 0$ (ب) $x^2 - x + a = 0$

۶*. نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد. یکی از ریشه‌های معادله برابر -1 است و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

۷*. با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ درجه دوم برابر $\frac{c}{a}$ است.

۸*. نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد ($a+b+c=0$) یکی از ریشه‌های معادله $1=x$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است.

* حل تمرین‌های ستاره‌دار اجباری نیست.

درس ۳

معادله‌های شامل عبارت‌های گویا

فعالیت



علی هر روز صبح با دوچرخه به مدرسه می‌رود. او از در منزل تا سر خیابان اصلی را ۴ دقیقه رکاب می‌زند و از آنجا تا مدرسه مسافت 2500 متری را از مسیر ویژه دوچرخه‌سواری با سرعت متوسط 15 کیلومتر بر ساعت طی می‌کند. می‌خواهیم با انجام فعالیت زیر مدت زمانی را که طول می‌کشد علی از منزل به مدرسه برسد، محاسبه کنیم.

۱. دستور محاسبه سرعت متوسط $v = \frac{x}{t}$ است که در آن x مسافت طی شده و t مدت زمان طی مسیر است. داده‌های مسئله را در این دستور جایگزین کنید.

۲. برابری $\frac{2}{5} = \frac{15}{t}$ یک معادله شامل عبارت گویا است. از آنجا که $t \neq 0$, پس معادله با معناست، برای حل این معادله، دو طرف را با $-15 -$ جمع کنید.

۳. با مخرج مشترک گیری سمت چپ، معادله را به صورت یک کسر بنویسید.
۴. کسری که مخرج آن مخالف صفر است، فقط وقتی برابر با صفر می‌شود که صورت آن صفر شود، بنابراین صورت کسر بالا را برابر با صفر قرار دهید.

۵. از اینجا به بعد یک معادله یک‌مجهولی درجه اول به دست می‌آید. آن را حل و مقدار t را محاسبه کنید.
۶. مدت زمان رسیدن علی از منزل تا مدرسه چقدر است؟

برای حل معادله های شامل عبارت های گویا، ابتدا با توجه به خاصیت های معادله و مخرج مشترک گیری، معادله ای نظری $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به دست می آید. به شرط اینکه $P(x) \neq Q(x)$ ، وقتی معادله جواب دارد که $P(x)=0$ است، سپس ریشه های این معادله را به دست می آوریم. از بین ریشه های به دست آمده، آنها را قبول می کنیم که مخرج کسر را صفر نکنند. (چرا؟)

$$\text{مثال : معادله } \frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} = 2 \text{ را حل کنید.}$$

حل : با اضافه کردن -2 به دو طرف معادله خواهیم داشت:

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - 2 = 0$$

اکنون با مخرج مشترک گیری از سمت چپ، تساوی آن را به صورت یک کسر بنویسید.

$$\frac{1}{x-3} - \frac{5(x-1)}{x-3} - \frac{2(x-3)}{(x-3)} = 0 \Rightarrow \frac{-6x+5}{x-3} = 0$$

مشاهده می کنیم که به معادله ای نظری $\frac{P(x)}{Q(x)}$ رسیدیم. بنابراین با شرط $x-3 \neq 0$ و با حل معادله $P(x)=0$ ، ریشه های معادله را در صورت وجود پیدا می کنیم.

$$21-7x=0 \Rightarrow x=3$$

چون $x=3$ مخرج کسرها را صفر می کند، این ریشه قابل قبول نیست و معادله ریشه ندارد.

$$\text{مثال : معادله } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20} \text{ را حل کنید.}$$

$$\frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(\dots)}{(x-5)(\dots)} + \frac{(x-1)(\dots)}{(x+4)(\dots)} - \frac{x^2-6x+5}{(x-5)(x+4)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\dots}{(x-5)(x+4)} = 0 \Rightarrow \dots = 0 \Rightarrow \dots$$

◀ ◀ مثال : به ازای چه مقدار a معادله $\frac{a}{x} = \frac{x+1}{x+a}$ دارای جواب $x=1$ است.

◀ ◀ حل : $x=1$ را در معادله قرار می‌دهیم و سپس مقدار a را به دست می‌آوریم.

$$x=1 \Rightarrow \frac{a}{1} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow \frac{a}{1} - \frac{2}{a+1} = 0 \Rightarrow \frac{a(a+1)}{(a+1)} - \frac{2}{a+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + a - 2}{a+1} = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ \text{یا} \\ a = 1 \end{cases}$$

چون $a=1$ یا $a=-2$ را صفر نمی‌کنند، پس هر دو قابل قبول اند.

◀ ◀ کار در کلاس



معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $1 + \frac{8}{x^2} = \frac{4}{x}$

(ب) $\frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$

(پ) $\frac{24}{10+m} + 1 = \frac{24}{10-m}$

(ت) $\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$

(ث) به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{x}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است؟

◀ ◀ طرح و حل چند مسئله به کمک معادله‌های شامل عبارت‌های گویا



۱. گلدانی نقره‌ای داریم که نسبت وزن نقره خالص به وزن مس خالص آن، برابر با ۸ است. استاد قلمکار آن را ذوب و 100 g مس به آن اضافه کرد و گلدان جدیدی ساخت. می‌دانیم $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید، نقره است. این گلدان قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است.

◀ ◀ حل : $\frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن مس}} = 8$ ، اگر وزن مس را برابر با x در نظر بگیریم، آنگاه وزن نقره $8x$ و وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با $9x = 8x + x$ است.

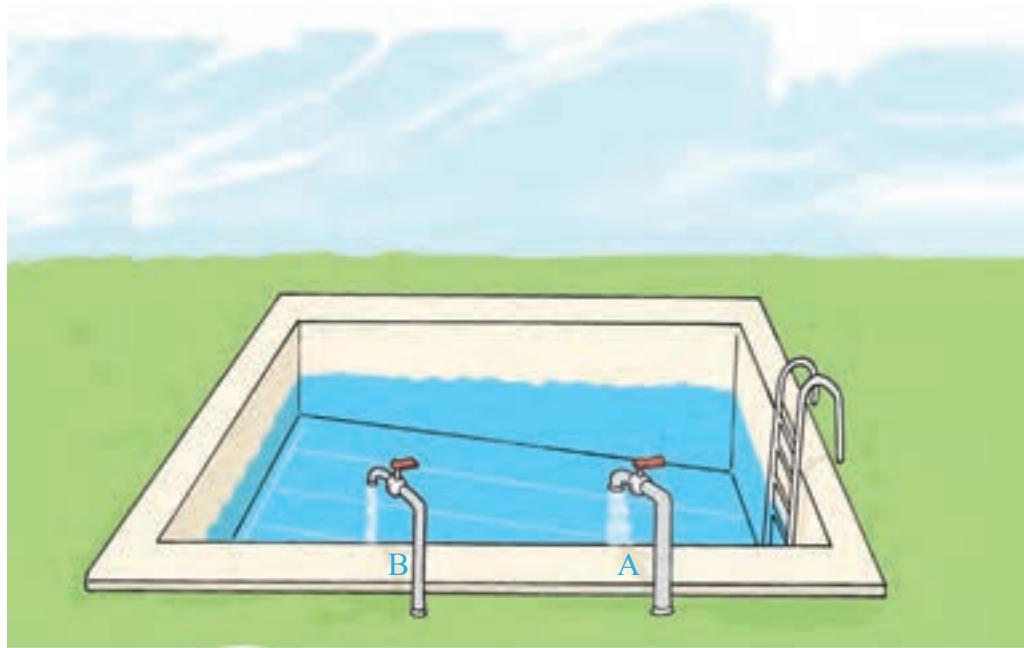
اگر بعد از ذوب شدن 100 گرم مس به آن اضافه کنیم، وزن گلدان جدید $100 + 9x$ است.

از آنجا که $\frac{4}{5}$ وزن گلدان جدید نقره است؛ یعنی $\frac{4}{5} = \frac{\text{وزن نقره}}{\text{وزن گلدان جدید}}$ ، پس داریم:

$$\frac{8x}{9x + 100} = \frac{4}{5}$$

جواب معادله فوق $x=100$ و از آنجا که وزن گلدان قبل از ذوب شدن $9x$ است، درنتیجه وزن گلدان قبل از ذوب شدن برابر با 90 گرم است.

۲. دو شیر آب A و B به یک استخر متصل‌اند. شیر A استخر را 10 ساعت زودتر از شیر B پُرمی‌کند. چنانچه دو شیر را با هم باز کنیم، آنگاه استخر در 12 ساعت پُرمی‌شود. اگر شیر B به‌نهایی باز باشد، استخر در چند ساعت پُرمی‌شود.



حل: فرض کنیم شیر B استخر را در x ساعت پُرمی‌کند. اگر حجم استخر را V در نظر بگیریم، پس از یک ساعت $\frac{V}{x}$ استخر پُرمی‌شود و به همین ترتیب اگر شیر A باز باشد، پس از یک ساعت $\frac{V}{x-10}$ استخر پُرمی‌شود. حال اگر دو شیر را با هم باز کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{V}{x} + \frac{V}{x-10} = \frac{V}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\Rightarrow \dots + \dots - \frac{x(x-10)}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{12x(x-10)} = 0 \Rightarrow \dots$$



۳. یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هریک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن اضافه شد و دوباره کیک را بین آنها تقسیم کردیم. در این مرحله به هریک به اندازه $\frac{1}{6}$ کمتر رسید. مشخص کنید در ابتدا چند نفر بوده‌اند؟^۱

■ حل : فرض کنید در ابتدا n نفر بوده‌اند؛ بنابراین به هریک $\frac{1}{n}$ کیک رسید، در مرحله بعد به هریک $\frac{1}{n+1}$ کیک رسید. از آنجا که در این مرحله به هریک $\frac{1}{6}$ کمتر رسیده است، خواهیم داشت :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{6}$$

با حل این معادله $n=2$ بدست می‌آید.

تمرین



۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

(الف) $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

(ب) $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

(پ) $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

(ت) $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$

(ث) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$

(ج) $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

۱. این مسئله اقتباس از کتاب جبر و مقابله خوارزمی است که در آن کتاب به جای (کیک)، کلمه درهم آمده است.

۲. مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است. آن دو عدد را پیدا کنید.

۳. هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی‌تر به ترتیبی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به ترتیبی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۴. به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t=-3$ است.

فصل سوم



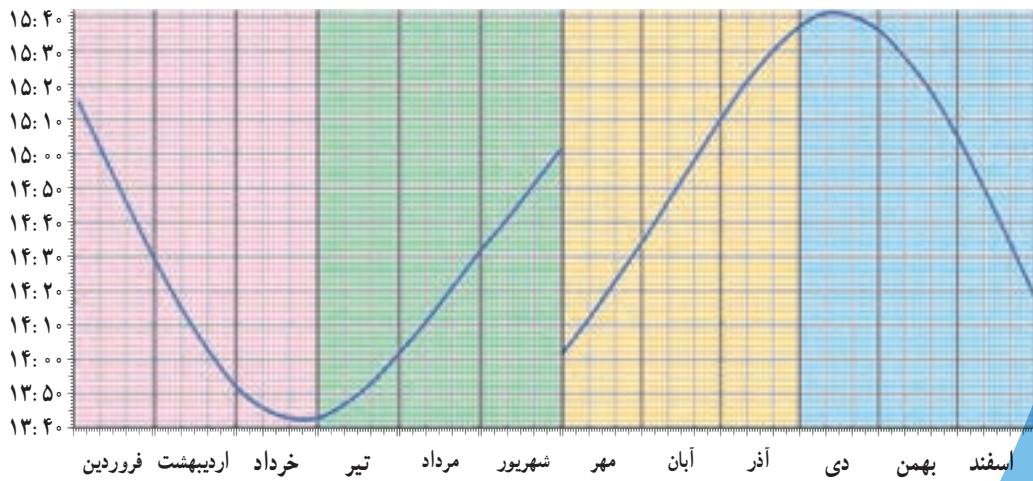
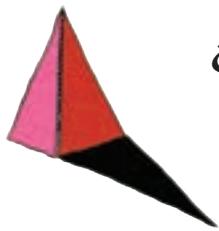
تابع

درس ۱ مفهوم تابع

درس ۲ ضابطهٔ جبری تابع

درس ۳ نمودار تابع خطی

درس ۴ نمودار تابع درجهٔ ۲



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.



یکی از شیوه‌های جهتیابی قبله استفاده از سایهٔ شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	$\frac{2}{5}$...	$\frac{4}{5}$	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	...	۵	۸	۹	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) براساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نداشته است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y ، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$; بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها براساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	1	5	3	...	$\frac{1}{2}$	۰	...
y	1	-7	...	3	۰

$$y = -2x + 3$$



او که مبنای جهان، «زوج» آفرید
خود به مازنیکتر شد از ورید

«تابعی» را از زمین تا آسمان
کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان

تابع منظور ما، «پیوسته» است
«حد»، به آمیال دل ما بسته است

دل به بالا تأثیرات می‌کند
حد تابع، «بی‌نهایت» می‌کند

هر کسی تابعی نهایت را شناخت

چون «جانب» سوی آن بالاشتافت



x	1	2	-1
y	2	...	$\frac{5}{4}$

$$y = x + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه‌بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده‌بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{نماتوب} = \frac{\text{وزن بر حسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد بر حسب متر}}$$

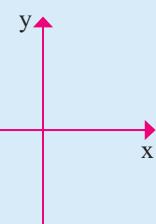
با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

شخص لاغر است و کمبود وزن دارد $\Rightarrow 19 < \text{نماتوب}$ (الف)

شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است $\Rightarrow 19 \leq \text{نماتوب} \leq 25$ (ب)

شخص اضافه وزن دارد $\Rightarrow 25 < \text{نماتوب}$ (پ)

شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد $\Rightarrow \text{نماتوب} \geq 30$ (ت)



x	y
...	...
...	...
1	...
...	2

نماتوب	گروه سنی
22	۱۹_۲۴
۲۳	۲۵_۳۴
۲۴	۳۵_۴۴
۲۵	۴۵_۵۴
۲۶	۵۵_۶۴
۲۷	۶۵ به بالا

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول رو به رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

پس از یافتن نماتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{نماتوب} \times \text{قد بر حسب متر} = \text{وزن مطلوب بر حسب کیلوگرم}$$

با دقیق در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز در می‌یابید که وزن مطلوب به نماتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق

طول قد و نماینده متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۴۵-۵۴ قرار داشته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی‌متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟

فعالیت



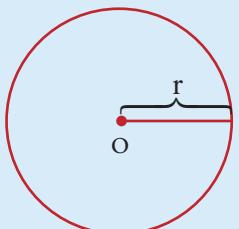
می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است :

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟
۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟
۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟
۴. جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی‌متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی‌متر مربع (مساحت)	π	...	4π
P بر حسب سانتی‌متر (محیط)	6π	...

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ ، تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ‌ها را روی محور افقی و y ‌های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (y, x) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (y, x) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. (اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و بر عکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$)

$$\frac{2\pi r}{2r} = \pi$$



ریاضی‌دان و منجم ایرانی،
جمشید غیاث‌الدین کاشانی
در اوایل قرن هشتم ه.ق.
توانست عدد π را با دقیقی
که تا ۱۵۰ سال بعد از وی
بی‌نظیر ماند، محاسبه کند.
او کتاب رساله محیطیه
خود را با این جمله شروع
می‌کند:
«به نام او که از اندازه نسبت
محیط دایره به قطرش
آگاه است».

فعالیت



۱. جدول زیر را کامل کنید.

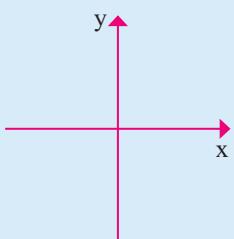
x	-۱	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	$3\sqrt{2} + 1$...	
(x, y)	(-۱, -۲)	(..., 1)	($\frac{2}{3}$, ۳)	(۱, ...)	(..., ...)	(..., ...)	

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^3$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار و نویسندگان هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:



نمودار خط $y = 2x - 3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:



کار در کلاس

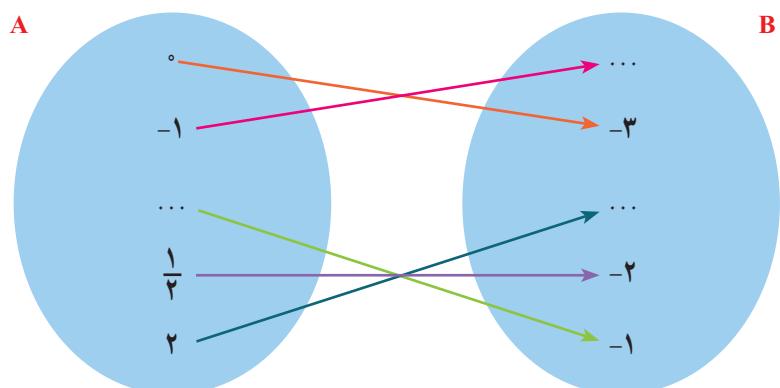


با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

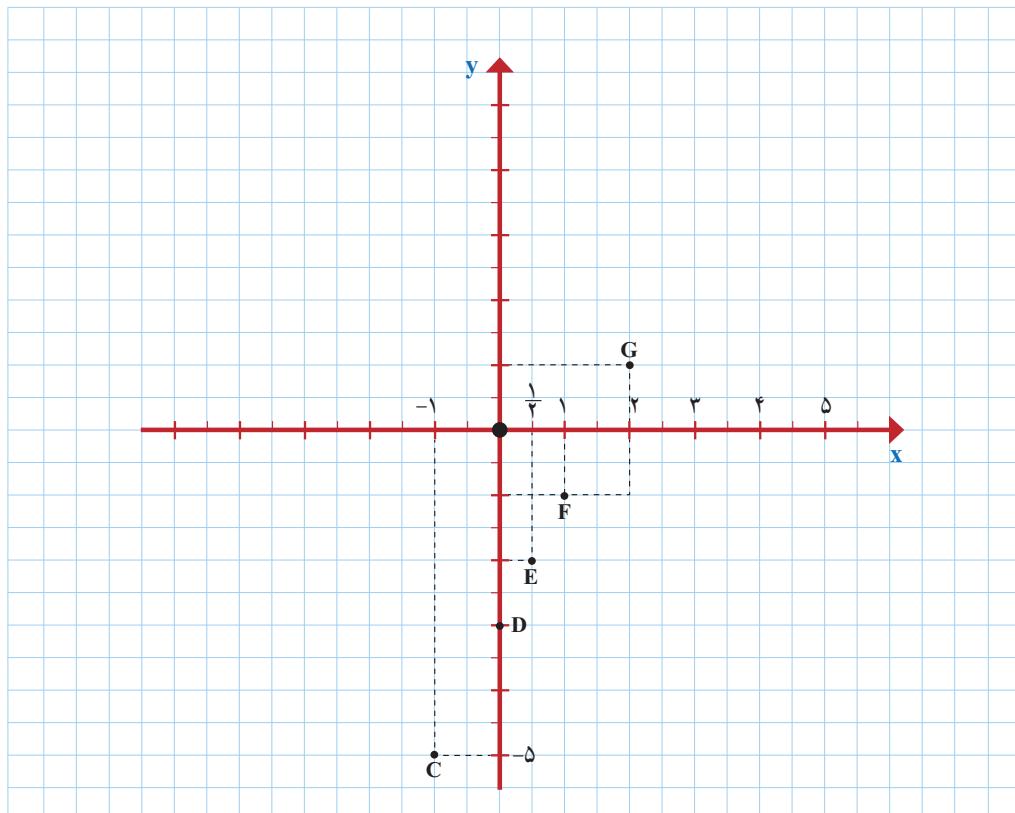
$A = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2} \right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می دهیم و سپس

نمودار پیکانی آن را رسم می کنیم. (جاهای خالی را پر کنید).

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	
y	-5	$y = 2x - 3$
(x,y)	(-1, -5)	(0, ...)	G



اگر هر یک از «زوج مرتب»‌های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می‌شود:



سؤال: برای رابطه $y = x^3$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

مفهوم تابع

در تمام فعالیت‌ها، مثال‌ها و تمرین‌های قبل، رابطه‌ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می‌آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می‌آید.

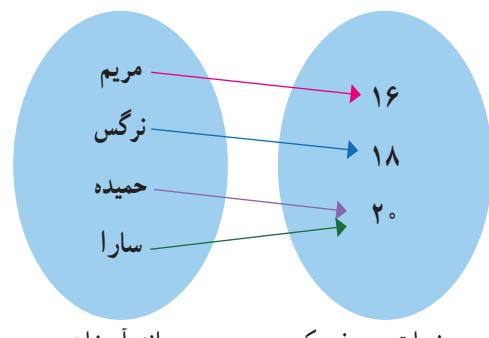
اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می‌نامند. به عبارت دقیق‌تر:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.

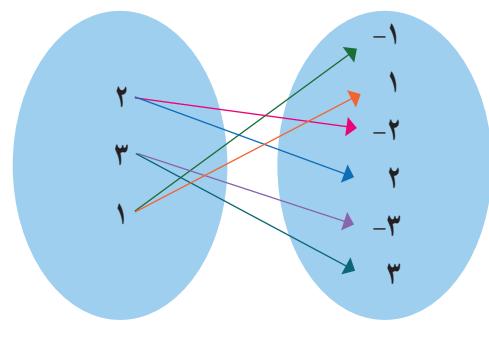
فعالیت



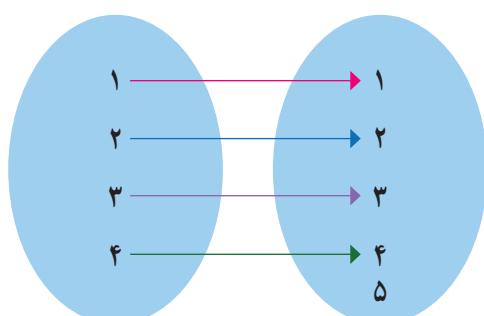
۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟



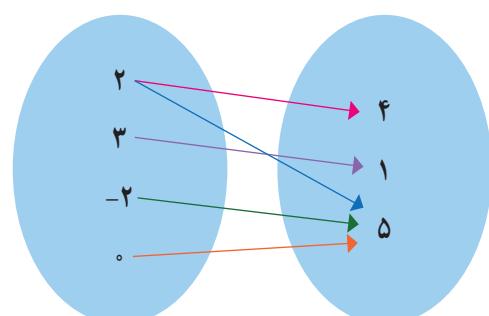
تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

(الف) $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$

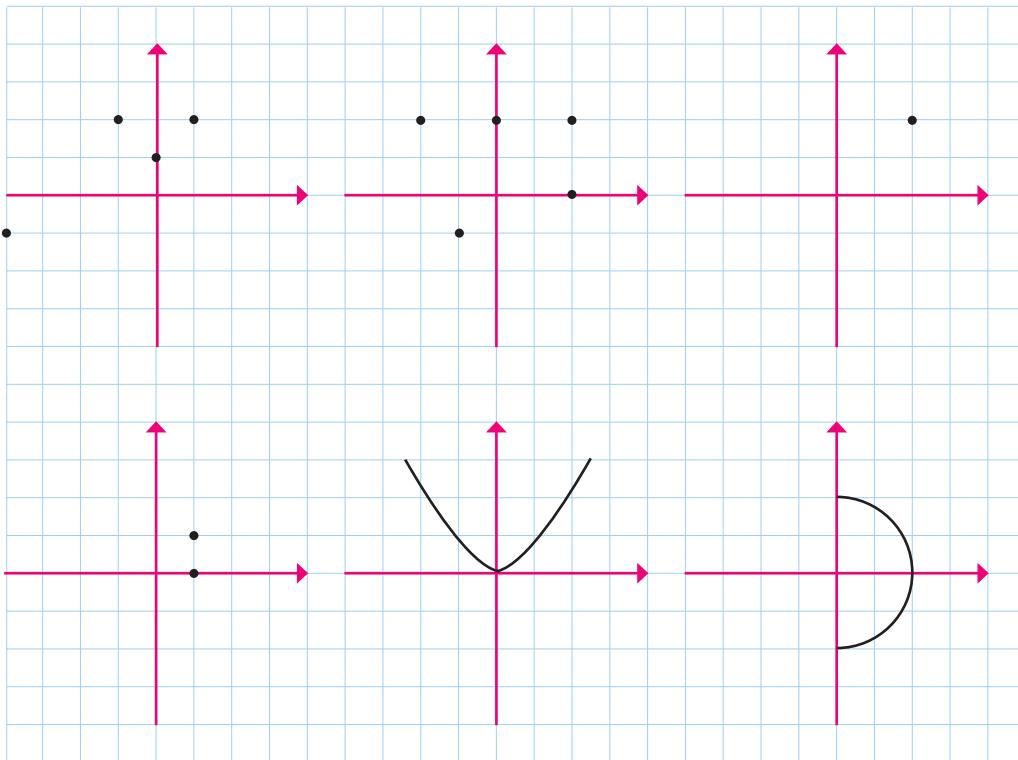
(ب) $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$

(پ) $H = \{(2,3)\}$

(ت) $I = \{(3,3)\}$

(ث) $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع است؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوگاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست



با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می‌توان گفت:

- اگر رابطه بین x و y را (x متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتب نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.
- اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.
- اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور z باشد، قرار نگیرند.

کار در کلاس



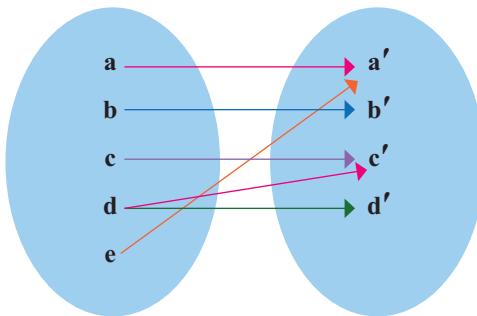
در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td><td>۱</td></tr> <tr> <td>۲</td><td>۴</td></tr> <tr> <td>۳</td><td>۹</td></tr> <tr> <td>۴</td><td>۱۶</td></tr> </tbody> </table>	x	y	۱	۱	۲	۴	۳	۹	۴	۱۶
x	y													
۱	۱													
۲	۴													
۳	۹													
۴	۱۶													
			f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه $\{0, 1, -1, 2, -2\}$ از $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ چهارم آن را نسبت می‌دهد											
		$f = \{(شنا, علی), (فوتبال, رضا)\}$ $f = \{(شنا, رضا) و (والبیال, آرش)\}$ $f = \{(کشتی, حمید) و (تیراندازی, علی)\}$												

تمرین



۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

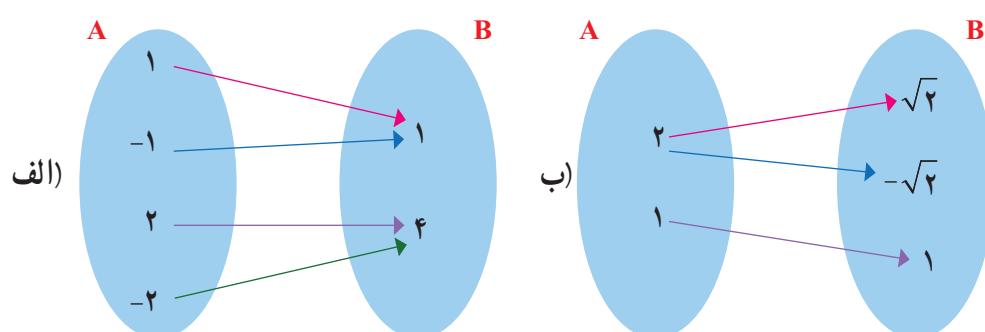


۲. اگر A مجموعه‌ای 3 عضوی و B مجموعه‌ای 2 عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.

۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



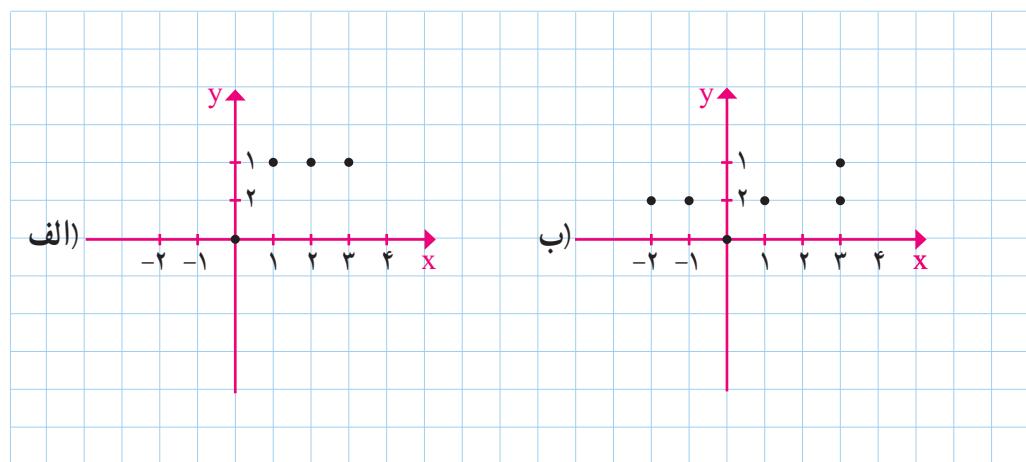
$$(ب) f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می‌کند؟



خواندنی

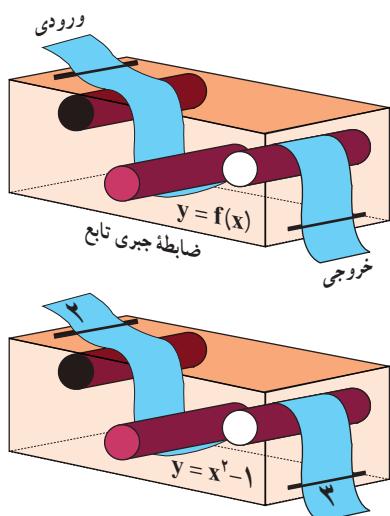
توابع در شاخه‌های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم‌گیری‌های اقتصادی استفاده می‌شود و یا در فیزیک، هنگامی که می‌خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می‌شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملگر در نظر گرفته می‌شوند و کاری را بر روی ورودی‌های خود انجام می‌دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل‌سازی ساختمان داده‌ها و تأثیرات الگوریتم می‌یابیم.

درس ۲

ضابطه جبری تابع

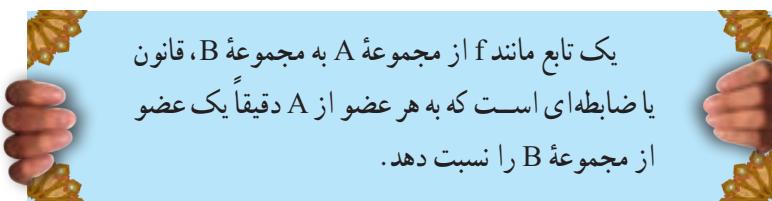
گاهی اوقات می‌توانیم رابطهٔ بین مؤلفهٔ اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



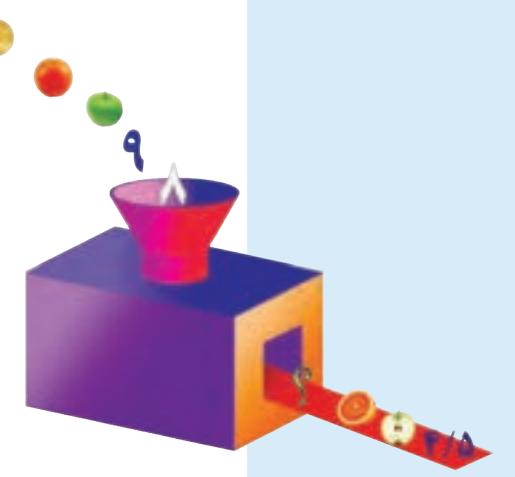
یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به‌طور مثال تابع $f = \{(1, 4), (2, 5), (-1, 2)\}$ را در نظر می‌گیریم در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفهٔ اول، مؤلفهٔ دوم، به‌دست می‌آید. عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$ ، در این صورت $y = x + 3$. معادلهٔ $y = x + 3$ را ضابطهٔ تابع f نامیم. اگر تابع f را به عنوان یک ماشین در نظر بگیریم و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y (متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همهٔ مؤلفه‌های اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همهٔ مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم. دامنهٔ تابع f را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می‌دهیم.



۱. Domain
۲. Range



برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f : A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$
 که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f درنظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و ماتنده نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$f : A \rightarrow B \\ f(x) = 2x^3 + 1 \quad , \quad A = \left\{ -1, \sqrt[3]{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

$\begin{array}{ c c } \hline x & f(x) = 2x^3 + 1 \\ \hline -1 & f(-1) = 2 \times (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0 \\ \sqrt[3]{2} & f(\sqrt[3]{2}) = 2 \times (\sqrt[3]{2})^3 + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \\ 2 & f(2) = 2 \times (2)^3 + 1 = 16 + 1 = 17 \\ 1 & f(1) = 2 \times (1)^3 + 1 = 2 + 1 = 3 \\ 0 & f(0) = 2 \times (0)^3 + 1 = 0 + 1 = 1 \\ \frac{1}{2} & f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 1 = 2 \times \frac{1}{8} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \\ \hline \end{array}$	$\rightarrow R_f = \left\{ 0, 1, 3, 5, 17 \right\}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------

الف) $f : A \rightarrow B \\ f(x) = x^3 - 1 \quad , \quad A = \left\{ 1, -1, 0, 4, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$

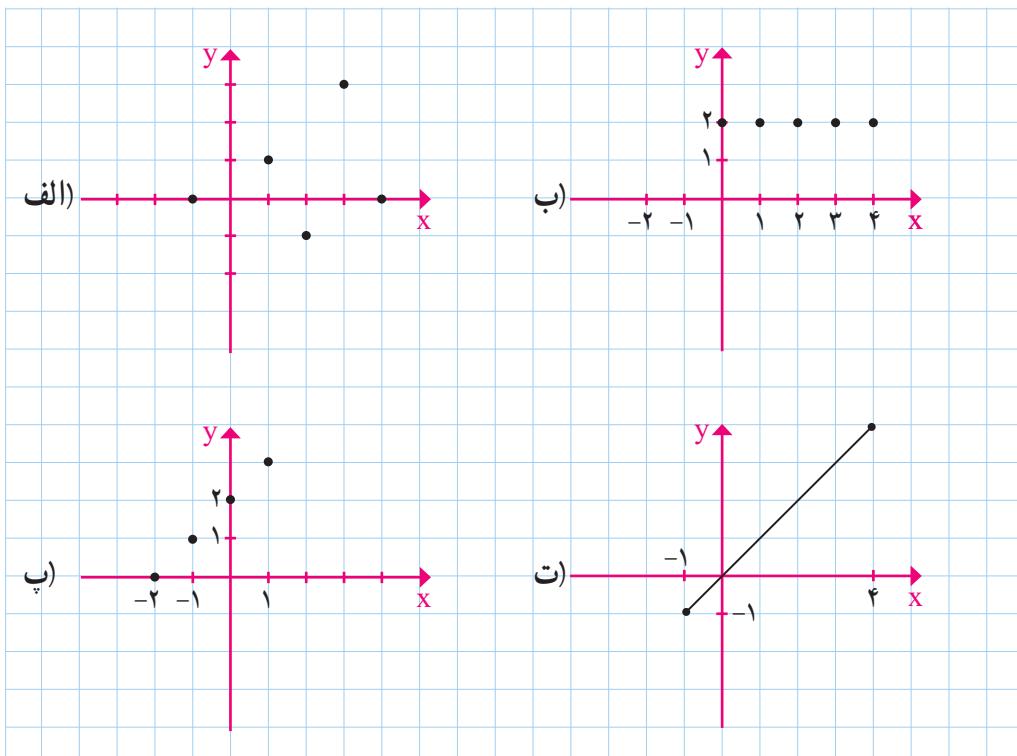
ب) $f : A \rightarrow B \\ f(x) = \sqrt{x+1} - 1 \quad , \quad A = \left\{ 0, -1, 0, 3, 2 \right\}$

پ) $f : A \rightarrow B \\ f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad , \quad A = \left\{ -1, 0, 1, \sqrt[3]{2}, \frac{1}{2} \right\}$

کار در کلاس



۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

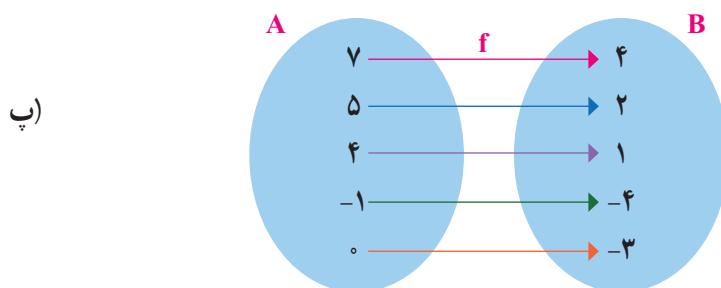


۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

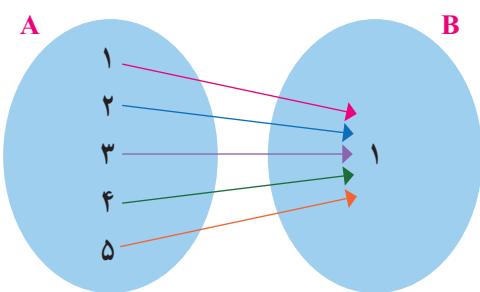
(الف) $f: A \rightarrow B$ $R_f = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$$f(x) = x + 4 \quad A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

(ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$



(ت)

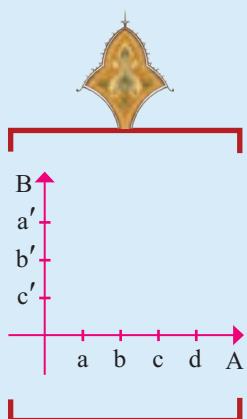


ث) $f = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1)\}$

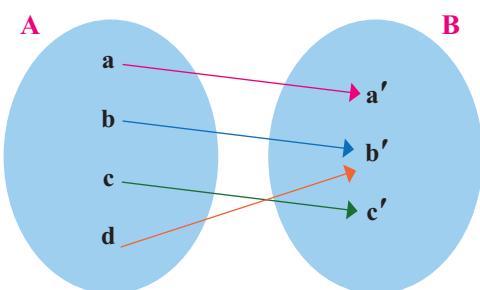
تمرین



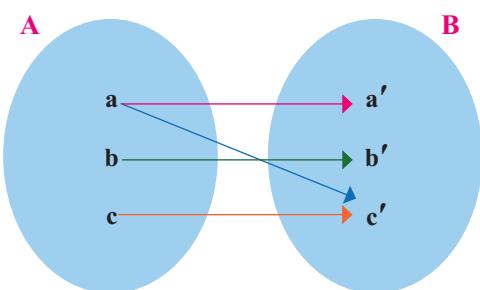
۱. کدامیک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



(الف)



(ب)



پ) $f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$

ت) $g = \{(1, 1)\}$

ث) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x + 1$

ج) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

ح) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2$$

۲. بُرُد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2 \right\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

ت) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x$, $A = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$

ث) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 0$, $A = \mathbb{R}$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می‌دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $(f(3))$ را بیابید.

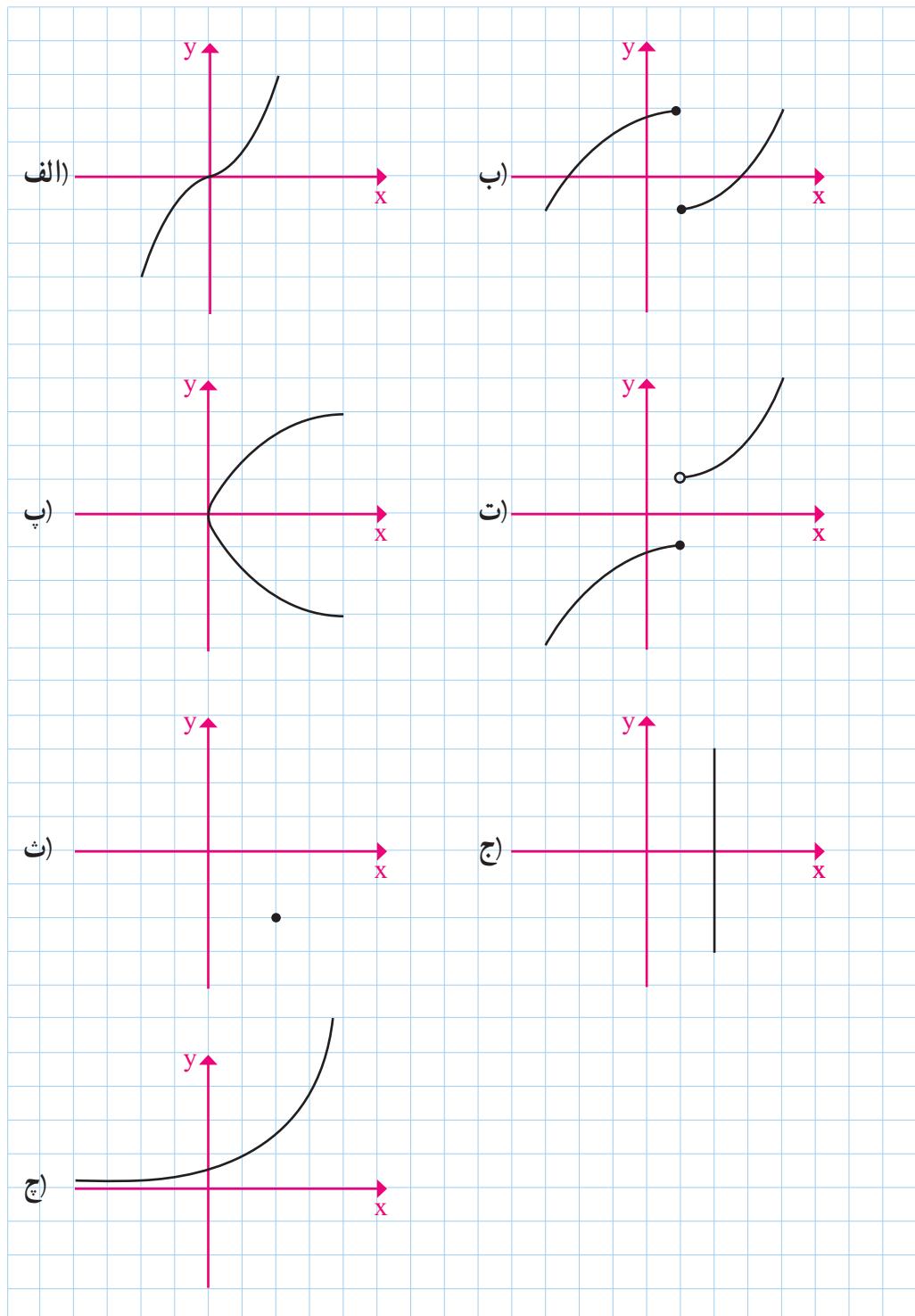
الف) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2(x - 4)^3$

ب) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt[2]{x - 4}$

پ) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x^3 - 4$

ت) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4$

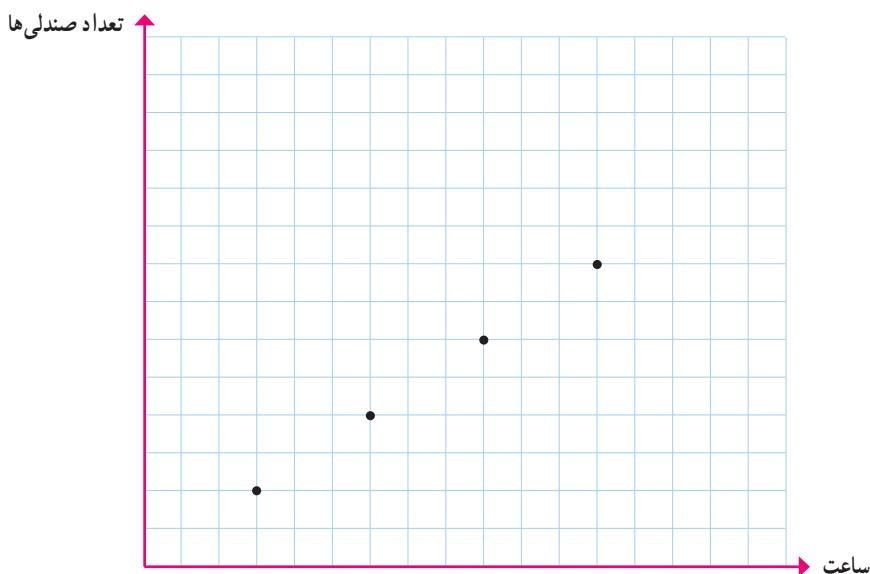
٤. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتادمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟

فعالیت



الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و بهازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

طول فنر را در شکل های زیر مشخص کنید.

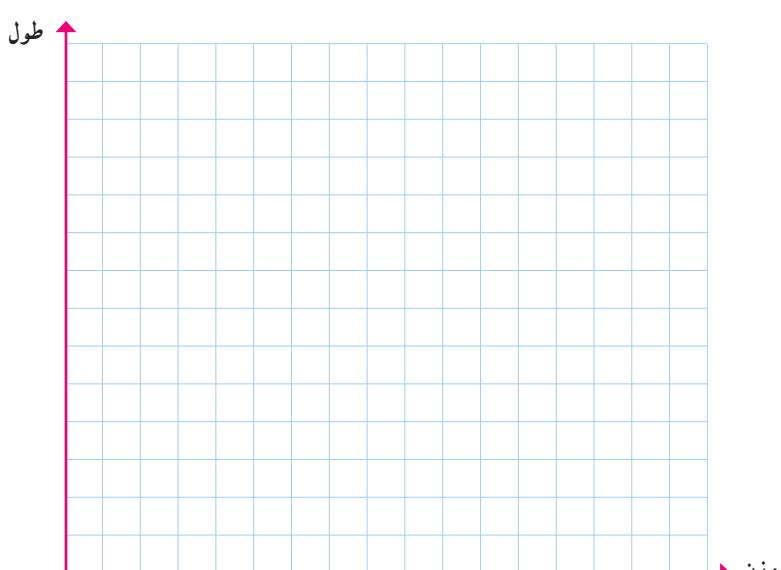


ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلو گرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی متر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$, $f(4)$, $f(8)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید.
نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



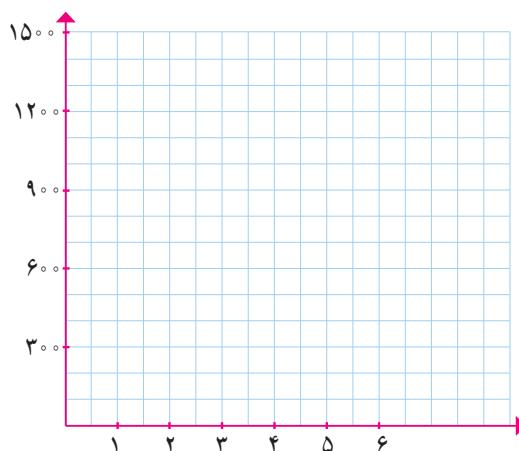
فعالیت



یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{3}{2}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.



x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
f(x) بر حسب متر					

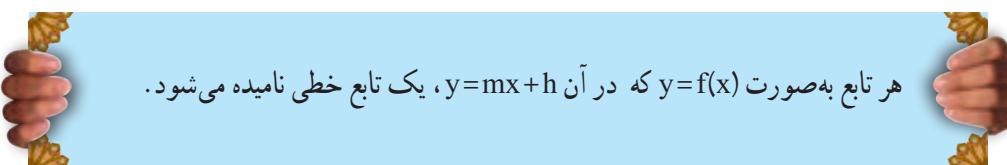


اگر متراز لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول رو به رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.

نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



کتاب و آب
هر دو در بحران‌اند؛
یکی از کم مصرفی،
دیگری از پرمصرفی!



هرتابع به صورت $y=f(x)$ که در آن $y=mx+h$ ، یکتابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در دو فعالیت قبل، هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد صادرات غیرنفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را بهره‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای آقالیم کشنیده و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی شناسانده‌اند این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در سمت سرس، محدودیت زیمن و وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در صرف آب یا استعمال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کنست آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اثلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آب‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیرکشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا مستیاری بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y = mx + b$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.

کار در کلاس

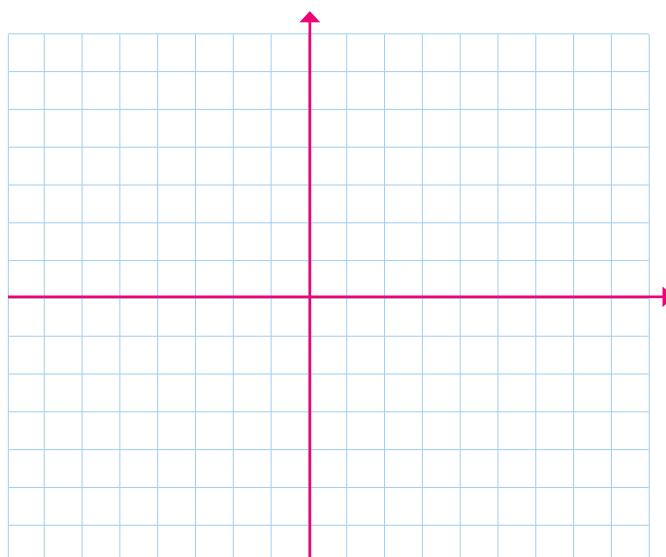


در یک تابع خطی $f(x) = mx + b$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dots$ و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dots$$

معادله خط:

$$f(x) = \dots$$



کار در کلاس



جدول زیر رابطه بین عمق و دماهی سنگ‌ها در زیر زمین نشان می‌دهد. x عرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

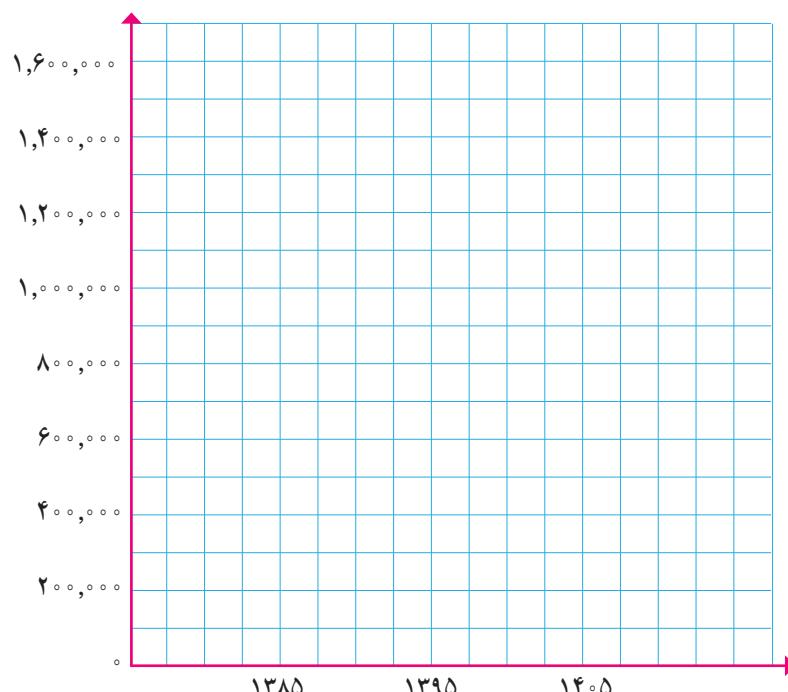
اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی بحسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$: شیب خط	$y=f(x)=mx+h$: معادله خط یا ضابطه تابع	$f(1)$	$f(2)$

کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارد. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (روند رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.



نرخ رشد :
به میزان افزایش
یک کمیت
(نظریه جمعیت)
در واحد زمان،
نرخ رشد گفته می‌شود.



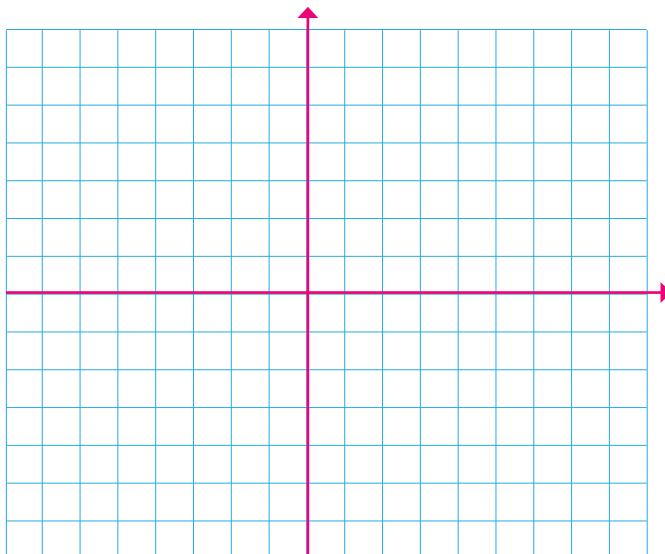
کار در کلاس

ضابطهٔ تابع محیط مستطیل‌های را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.
– آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟



کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(1) = -1$ باشد، نمودار و ضابطهٔ تابع f را مشخص کنید.



تمرین



۱. مقادیر m و n را چنان بباید تا در تابع با ضابطه $f(x) = mx + n$ داشته باشیم: $f(2) = 4$ و $f(1) = 1$.
۲. ضابطهٔ تابع خطی f را که از نقاط $(2, 3)$ و $(1, 4)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.
۳. در تابع خطی f داریم $f(1) = 5$ و $f(2) = 8$ ، مقادیر $(-3, f(5))$ و $(f(-5), 5)$ را بباید.

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ و از نقطه $\frac{5}{2}$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(1)$ و $f(-1)$ را به دست آورید.

۶. رابطهٔ بین درجهٔ دما بر حسب سانتی گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجهٔ سانتی گراد بالا رفته است. دمای آن بر حسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری – چابهار

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲



فعالیت

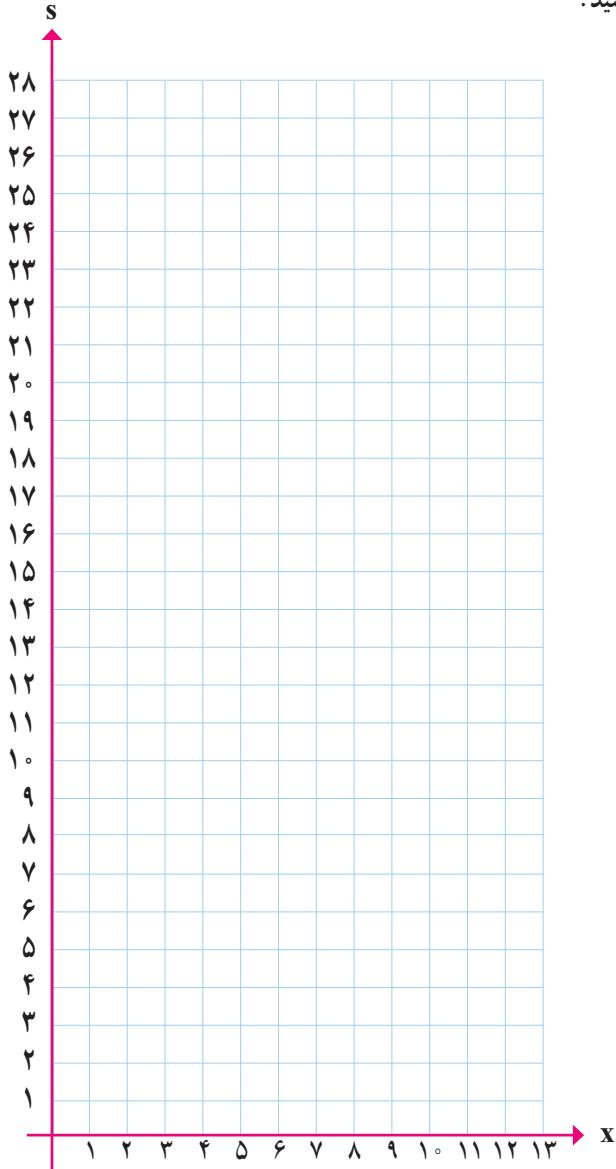


برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربع های 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت 20 تهیه می کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می دهیم.
الف) جدول زیر را کامل کنید.



x	۱	۲				۶			۹
y	۹	۸	۷						
s	۹			۲۴				۱۶	
(x, s)	$(1, 9)$	$(2, 16)$			$(5, 25)$			$(8, 16)$	

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محوهای زیر شخص کنید.



فعالیت



یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار پیروزی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $x \cdot 120$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 20 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

(الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ متر کار در یک روز) و $x=300$ چقدر است؟

(ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟

(پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200), P(100), P(20)$ را محاسبه کنید.

$$P(20) = 20 \times (1200 - 20) - (30000 + 20 \times 200) = -10400$$

$$P(100) =$$

$$P(200) =$$

$$P(300) =$$

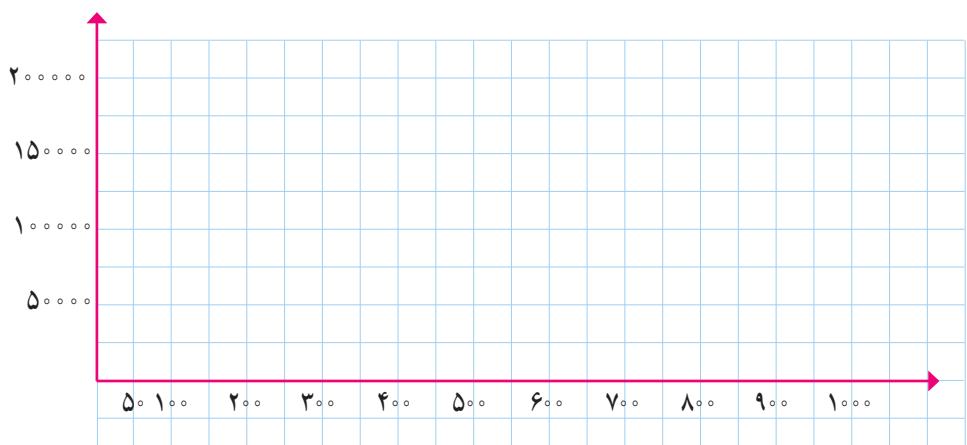
(ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید.

(ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

X	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900
P(x)	-10400	60000								

(ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید.

نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



(ج) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه متراژ بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟



رسم نمودار تابع درجه دوم

معادله تابع درجه دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می‌باشد.

نمودار آن به یکی از دو صورت یا است که به آن سهمی می‌گوییم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه‌ای به طول $-\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

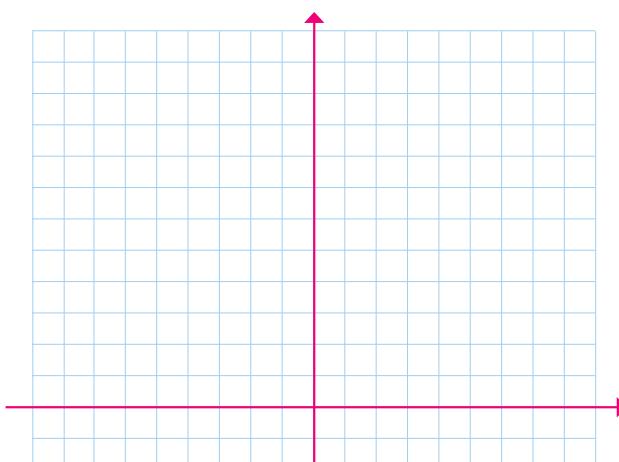
- اگر در معادله سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.
- اگر در معادله سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	9				0				16	...

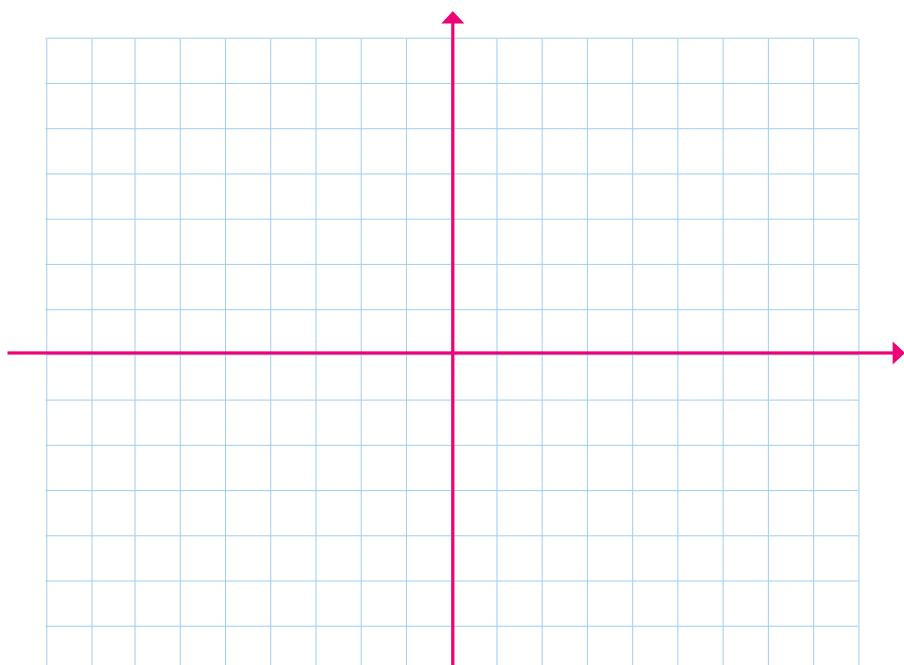


کار در کلاس



جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^3$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...					4				...	



کار در کلاس



نقاط رأس سهمی هایی را که معادله های آنها داده شده است، مشخص کنید.

(الف) $y = x^3$

(ب) $y = 4 - x^3$

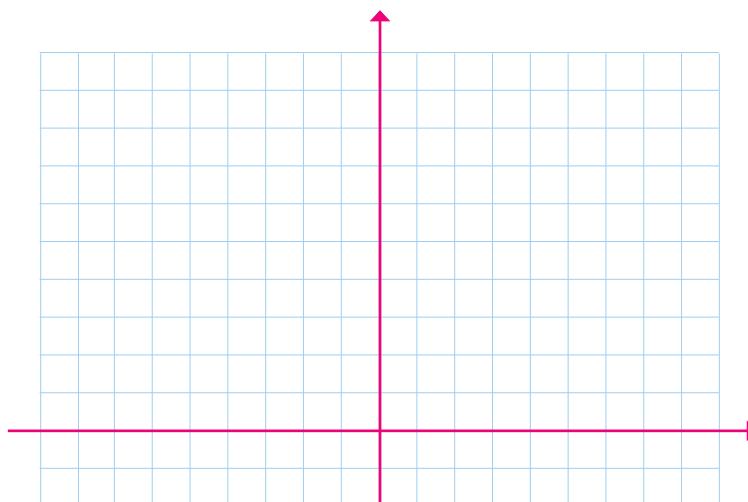
(پ) $y = 2x^3 - 4x + 1$

(ت) $y = 2(x-1)^3 + 1$

کار در کلاس

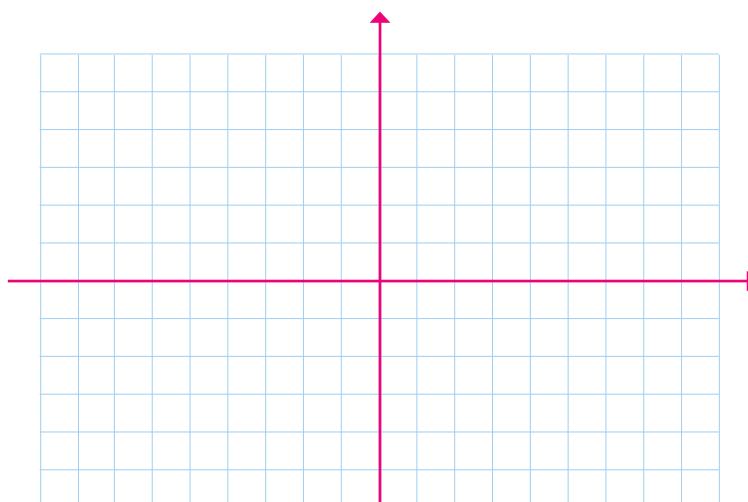


الف) رأس سهمی به معادله $y = 2(x-1)^2 + 1$ را مشخص کنید و به کمک آن نمودار سهمی رارسم کنید.



ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 5$ رارسم کنید.

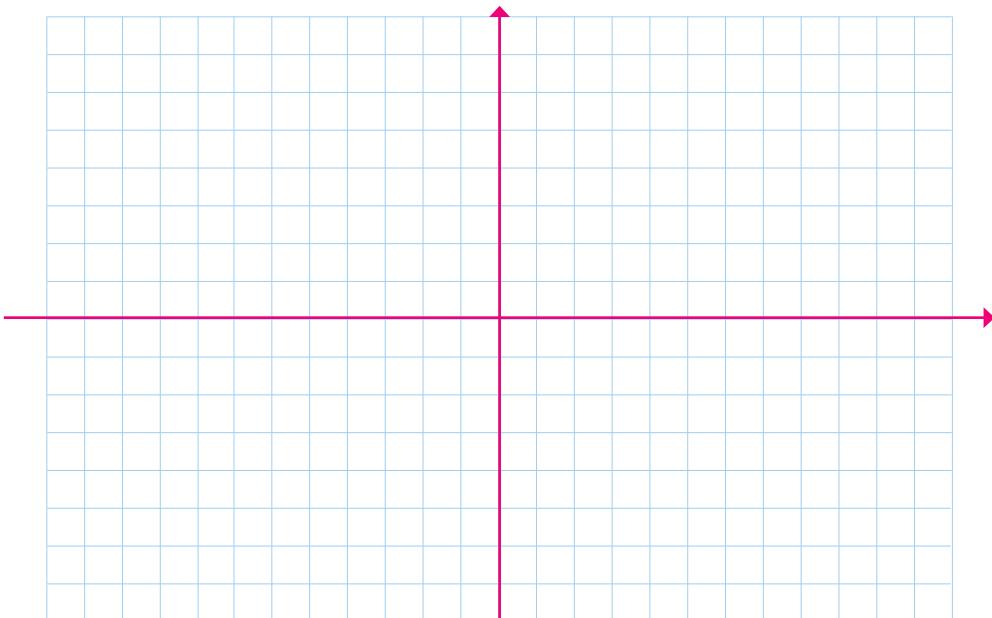
x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				5				...



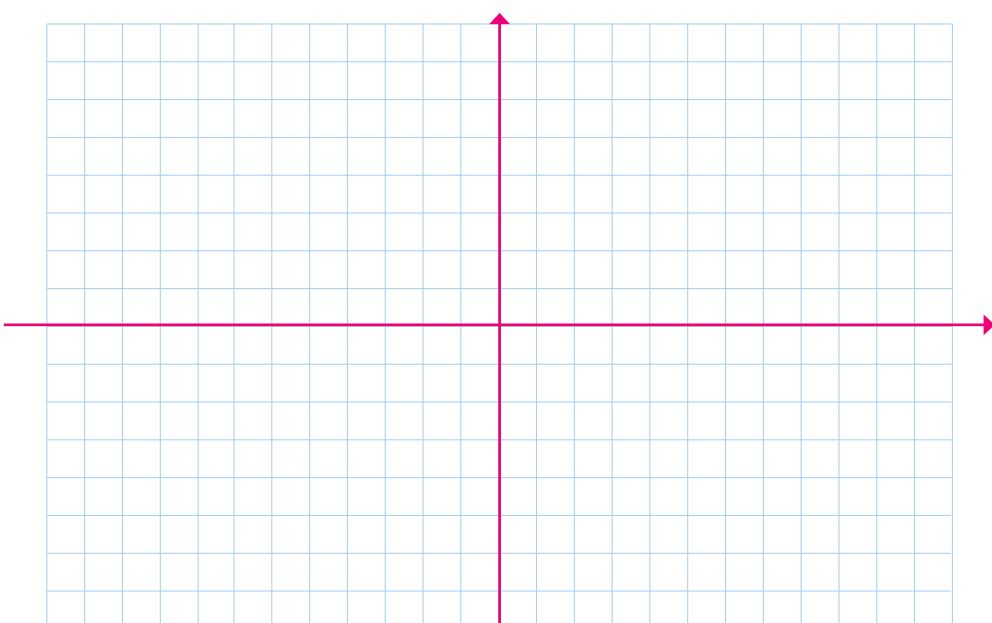
کار در کلاس



۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x - 2$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



۲. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 4x + 1$ و $y = 2x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخوردهای دو سهمی را مشخص کنید.

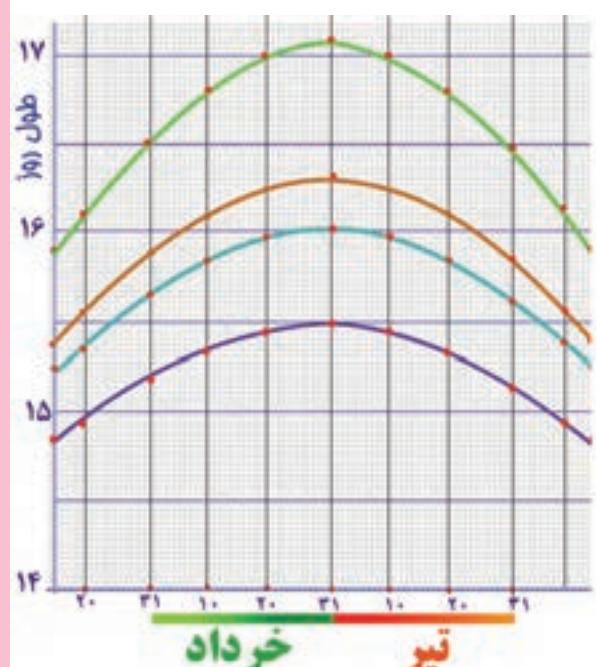


تمرین



۱. نمودار سهمی‌های به معادله‌های $y = -x^2 + 4x + 1$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 4$ باشد، ماکسیمم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیمم می‌شود.
۴. اگر $100 = 2x + a$ باشد x و a را طوری باید که $y = xa$ ماکسیمم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هر یک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:
 - الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
 - ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
 - پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. وقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هرچه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.



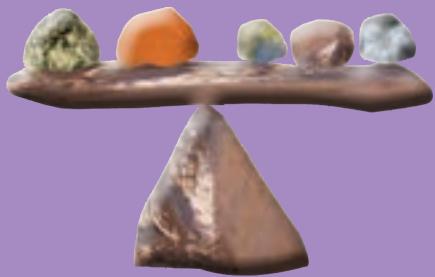
فصل چهارم

کار با داده‌های آماری

درس ۱ گردآوری داده‌ها

درس ۲ معیارهای گراییش به مرکز

درس ۳ معیارهای پراکندگی



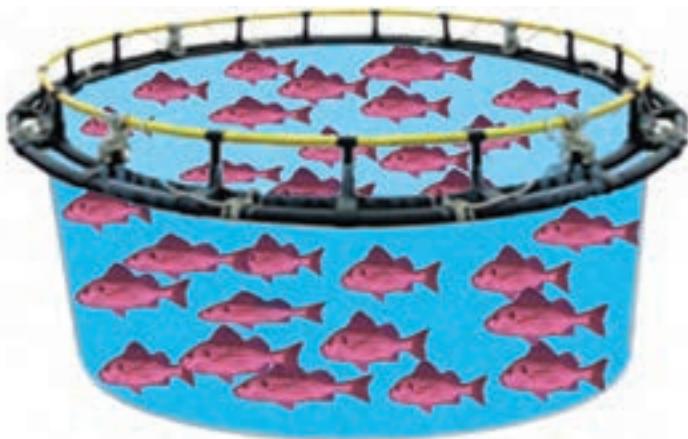
درس ۱

گردآوری داده‌ها

فعالیت



می‌خواهیم وزن ماهی‌های یک حوضچه پرورش ماهی را به منظور فروش آنها تخمین بزنیم. نخست از قسمت عمیق و در مرحله بعد، از قسمت کم عمق ۵ ماهی صید می‌کنیم.



انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق



انتخاب ۵ ماهی از قسمت کم عمق



۱. آیا انتخاب ۵ ماهی از قسمت عمیق، تخمین خوبی از وزن ماهی‌های حوضچه به ما می‌دهد؟ یعنی آیا می‌توان برای فروش آنها اعلام آمادگی کرد؟

۲. به نظر شما کدام تخمین بیش از مقدار واقعی است و کدام یک کمتر از مقدار واقعی؟

۳. اگر شما امکان صید ۵ ماهی داشتید، آنها را چگونه انتخاب می‌کردید تا منجر به تخمین بهتری از وزن ماهی‌های حوضچه می‌شد؟ (فرض کنید ماهی‌ها، همانند شکل در حوضچه پخش شده‌اند و تحرک زیادی ندارند).

۴. اگر از نحوه پخش شدن ماهی‌ها اطلاعی نداشتیم، بهتر بود ۵ ماهی را چگونه انتخاب می‌کردیم؟ آیا انتخاب تصادفی چند بخش از حوضچه (مثلًاً زمانی که آن را سطرنجی کرده‌ایم) به ما کمک می‌کند ماهی‌های انتخابی معرف بهتری از کل ماهی‌ها باشند؟



از قدیم گفته‌اند که
مشت نمونه خروار است،
ولی نه هر مشتی، چرا؟
اگر نمونه تصادفی
انتخاب شود،
معرف جامعه
خواهد بود.

داده‌ها واقعیت‌هایی درباره یک چیزند که در محاسبه، استنباط، یا برنامه‌ریزی به کار می‌روند.
واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعه کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌نامند.
هر زیرمجموعه از جامعه آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک نمونه می‌نامند.
نمونه‌ای را که در آن، همه اعضای جامعه، شانس انتخاب یکسان در نمونه را داشته باشند نمونه تصادفی می‌نامند.

در مثال حوضچه ماهی، هر ماهی درون حوضچه یک واحد آماری است. به کل ماهی‌های حوضچه جامعه گفته می‌شود. اگر وزن تک ماهی‌ها را در اختیار داشته باشیم داده‌های جامعه را داریم. وزن نمونه ۵ ماهی از قسمت کم عمق، معرف داده‌های یک نمونه پنج تایی است. اگر ۵ ماهی با یک روش تصادفی از حوضچه استخراج شود، عملاً یک نمونه تصادفی پنج تایی از حوضچه در اختیار داریم.

خواندنی

تفاوت زیادی بین «عدد» در ریاضی و «داده» در آمار وجود دارد. به عبارت دیگر عدد ۵ یک مفهوم در ریاضی دارد و داده‌ای که مقدار آن ۵ است، علاوه بر مقدار آن حاوی اطلاعات زیادی است. به عنوان مثال، این داده می‌تواند متوسط تلفات روزانه جاده‌های کشور در یکی از سال‌های اخیر باشد.



فعالیت



می خواهیم طول قد داشن آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می کنید؟

آمارگیری: گردآوری داده ها به یکی از روش های ممکن
آمارگیر: کسی که آمارگیری را انجام می دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.

مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده ها

تعداد دانش آموزان	چوب خط برای شمارش	اندازه طول قد
		کوتاه تر از ۱۴۰ سانتی متر
		۱۴۰-۱۴۹ سانتی متر
		۱۵۰-۱۵۹ سانتی متر
		۱۶۰-۱۶۹ سانتی متر
		۱۷۰ سانتی متر یا بلندتر



چگونه مطمئن می شویم که دانش آموزی از قلم نیفتاده است؟ چه راهکاری برای این منظور پیشنهاد می کنید؟

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه حل ساده تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم ترین روش های آمارگیری، استفاده از پرسش نامه است. پرسش نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت نام در مدرسه، شما یا والدین، آن را تکمیل کرده اید. پرسش نامه را می توانند واحدهای جامعه یا نمونه تکمیل کنند.

مثالی از پرسشنامه طراحی شده

سلام.

می خواهیم طول قد دانش آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.

لطفاً یکی از گزینه ها را انتخاب کنید.

طول قد شما چقدر است؟



کوتاه تر از ۱۴۰ سانتی متر



۱۴۰-۱۴۹ سانتی متر



۱۵۰-۱۵۹ سانتی متر



۱۶۰-۱۶۹ سانتی متر



۱۷۰ سانتی متر یا بلند تر

خواندنی

برای به انجام رساندن یک آمارگیری
باید پاسخ سوالهای زیر را بدانید:

۱. می خواهید چه چیزی بیندا کنید؟ چرا؟
۲. چه داده هایی را باید گردآوری کنید؟ چگونه تصمیم می گیرید؟
۳. کدام راه، بهترین راه گردآوری داده ها است؟ چرا؟ آیا به ابزار خاصی نیاز دارید؟
۴. به چه مقدار داده نیاز دارید؟ چگونه تصمیم می گیرید؟
۵. داده های شما باید چقدر دقیق داشته باشند؟ چرا؟
۶. داده هایتان را چگونه ثبت می کنید؟ چرا این روش را انتخاب کرده اید؟
۷. داده ها را چگونه ارائه می کنید؟ چرا؟
۸. آیا داده ها از الگوی خاصی پیروی می کنند؟ داده ها بیان کننده چه هستند؟
۹. چه نتیجه گیری یا پیشگویی خاصی می توانید از داده ها ارائه کنید؟
۱۰. آیا نتایج با آنچه انتظار داشتید، تطبیق دارد؟
۱۱. چگونه نتایج کار را ارائه می کنید؟ برای چه کسانی ارائه می کنید؟
۱۲. با توجه به نتایج به دست آمده، آیا می توانید سوالات دیگری را نیز بررسی کنید؟ به نظر شما در مرحله گردآوری داده ها به کدامیک از سوالات فوق باید پاسخ داده شود؟

کار در کلاس



۱. چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش آموزان یک مدرسه پیشنهاد می کنید؟
۲. فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری همه داده های دانش آموزان در اختیار نداشته باشد. اگر بخواهیم نمونه ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟

روش های گردآوری داده ها

دادگان ها



پرسشنامه



مصاحبه



مشاهده



۱. مشاهده: گردآوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باغ میوه.





آمار، تصویر دیروز،
آینه امروز، دورنمای فردا

آمار، سنجش گذشته،
شناخت حال،
درک آینده



۲. پرسشنامه: مجموعه سؤالات از پیش

تعیین شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰ سال یک بار با استفاده از پرسشنامه اطلاعات همه خانوارهای ساکن در ایران را

جمع آوری می کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می گوییم.



۳. مصاحبه: معمولاً بین دو نفر صورت

می گیرد، یکی مصاحبه گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه شونده یا پاسخگو است. مثلاً اگر بخواهیم درباره مسائل فرهنگی کاهش ترافیک پژوهش کیم، مصاحبه از صاحب نظران راه حل مناسبی برای گردآوری داده هاست. از این روش، بیشتر زمانی استفاده می شود که آمارگیر اطلاع کافی از همه پاسخهای ممکن را ندارد.

۴. دادگانها: شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده‌اند. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده‌اند، به دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به سرعت رواج یافته است.

تمرین



کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

۱. میزان رضایت مشتریان بانک از نحوه برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.

۲. سن همه دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایه دهم.

۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

کار در کلاس



الف) کدام روش برای گردآوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱. تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.
۲. ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.
۳. طول قد دانش‌آموزان یک کلاس.

ب) می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر آمارگیری کنیم.

هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برد؟

پرسشنامه: اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمانبر است.

مشاهده: اگر به دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

دادگانها: همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.

خواندنی

آمارگیری را می‌توان به روش‌های بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ابزاری نظری «گوگل فرم» یک پرسشنامه طراحی کرد و آن را به نشانی نمونه انتخابی ارسال کرد و نتایج را از «گوگل فرم» بازیابی کرد.

فعالیت



قرار است درباره افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همه افرادی هستند که توانسته‌اند به قله برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد متغیر می‌گویند. سایر متغیرها می‌توانند مواردی مانند: سن، وزن، ملیّت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمی یا کیفی باشند.

متغیر : هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.

متغیر کمی : متغیری است که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.

متغیر کیفی : متغیری است که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به کار می‌رود و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد.

در مثال کو亨وردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کو亨ورد، متغیرهای کمی هستند. متغیرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی اند و در مثال کو亨وردان دنا، جنسیت و ملیت را در بر می‌گیرند. به عنوان مثال، جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر جامعه : یک مشخصه عددی است که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند قابل محاسبه است. مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک تک کو亨وردان را داشته باشیم، یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعه کو亨وردان، معرف یک پارامتر است.

اگر داده‌های بعضی از کو亨وردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردان کو亨ورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره‌ها از یک نمونه به نمونه دیگر تغییر می‌کنند. این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند. چرا؟

در بسیاری از موارد، آمارگیری از کل جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین علی‌رغم اینکه پارامتر دارای مقدار ثابتی است، این مقدار مجھول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آماره نمونه : مشخصه‌ای عددی که توصیف کننده جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مثال : اداره کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آماده برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری هستند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیر کمی است، زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، سرشماری از جامعه داده‌ایم (که امکان پذیر نیست). متوسط وزن همه هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت، مزه هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزه هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کل هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا «مزه» متغیری کیفی است. از آنجا که نمی‌توانیم همه هندوانه‌ها را مزه کنیم، فقط بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت هندوانه‌های دارای مزه «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.



کار در کلاس

یک شبکه تلویزیونی می‌خواهد نسبت دارندگان تلویزیون در شیراز را بداند، که برنامه جدید این شبکه را حداقل یک بار در هفته تماشا می‌کنند. بدین منظور یک گروه ۱۰۰۰ نفری از دارندگان تلویزیون را در این شهر بررسی می‌کند.

الف) داده‌ها و متغیرهایی را که بررسی می‌شوند، مشخص کنید.

جواب : داده‌ها اطلاعات گروه ۱۰۰۰ نفری دارندگان تلویزیون در شیرازند، و متغیر، تماشای تلویزیون است که پاسخ آن «تماشا می‌کند» یا «تماشا نمی‌کند» افراد مورد بررسی است.

ب) آیا این داده‌ها یک نمونه‌اند؟ اگر بله جامعه آماری کدام است؟

پ) متغیر کمی است یا کیفی؟

ت) چند متغیر کمی را که ممکن است در اینجا جالب باشد، مشخص کنید.

جواب : سن، درآمد،

ث) نسبت افرادی در نمونه که برنامه جدید را تماشا می‌کنند، آماره است یا پارامتر؟ (تعداد اعضای مورد نظر تقسیم بر تعداد کل اعضای یک مجموعه را نسبت می‌گوییم).

مقیاس‌های اندازه‌گیری

داده‌ها را به دو گروه کمی و کیفی تقسیم کردیم. از نگاهی دیگر، می‌توان متغیرهای داده‌ها را در چهار مقیاس اندازه‌گیری دسته‌بندی کرد. اندازه‌گیری در تعریف به معنی ایجاد تفکیک بین افراد یا اشیا است. وقتی دونوزاد دوقلو را نام‌گذاری می‌کنیم تا آنها را تفکیک کنیم، در واقع اندازه‌گیری کرده‌ایم. بسته به دقیقی که این اندازه‌گیری صورت می‌گیرد آن را به چهار مقیاس اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی تقسیم می‌کنیم. هدف از شناسایی این مقیاس‌ها تعیین نوع محاسبه مناسب برای داده‌ها است؛ نظریت‌تیپ، محاسبه اختلاف و نسبت گرفتن.

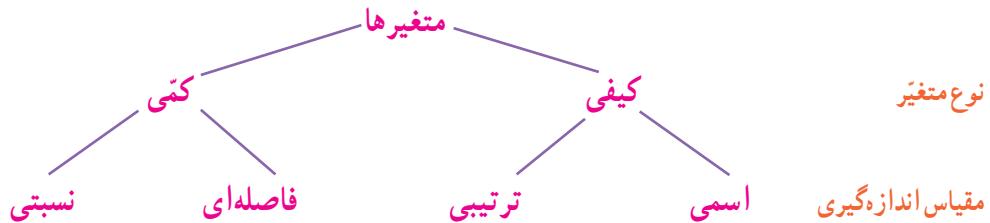
نسبتی: این مقیاس برای داده‌هایی است که قابل مرتب کردن هستند و اختلاف بین مقادیر داده‌ها، و نسبت مقادیر داده‌ها نیز بامتنا است. اغلب متغیرهای فیزیکی مانند نمره، وزن و قد داش آموzan و متغیرهایی که با واژه تعداد شروع می‌شوند در این مقیاس اندازه‌گیری می‌شوند. در این مقیاس صفر را در این مقیاس قراردادی است. مثلاً اگر دمای بوشهر 2° و تهران 1° درجه سلسیوس باشد نمی‌توان گفت دمای هوای بوشهر دو برابر تهران است؛ ولی می‌توان گفت که اختلاف دما 1° درجه سلسیوس است.

فاصله‌ای: این مقیاس به دلیل استفاده از لوازم یا قواعد دقیق اندازه‌گیری ویژگی افزایی‌الاشیا به دقت اندازه‌گیری می‌شود. بهینه‌سازی این افراد یا اشیا است که قابل مرتب کردن هستند و همچنین اختلاف بین مقادیر داده‌ها با معناست؛ مانند درجه حرارت در شهرهای مختلف بر حسب سلسیوس. مقادیری که به دو نفر یا دو شیء داده می‌شود صرفاً بیان کننده فاصله بین آنهاست. در ترتیب صفر در این مقیاس قراردادی است. مثلاً در ترتیب $18, 19$ درجه داش آموzan در یک کلاس. اگر در ترتیب اول تا سوم معدل $18, 19$ درجه داش آموزنی داشتند؛ مانند گروه دانش آموزی. کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای کار می‌رود.

ترتیبی: این مقیاس با استفاده از الفاظ، ضمن ایجاد تفکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز فائل می‌شود. مقیاس ترتیبی برای متغیرهایی است که قابل مرتب کردن هستند و در عین حال ممکن پذیر نیست یا بی معناست؛ مانند امکان پذیر نیست یا بی معناست؛ مانند رتبه داش آموزان در یک کلاس. اگر در ترتیب اول تا سوم معدل $18, 19$ درجه داش آموزنی داشتند؛ مانند گروه دانش آموزی. کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای کار می‌رود.

اسمی: این مقیاس برای متغیرهایی است که شامل نام‌ها، برچسب‌ها و گروه‌ها می‌شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد؛ مانند گروه خونی انسان‌ها و شماره دانش آموزی. کدهای عددی در این مقیاس در واقع عدد نیستند؛ بلکه صرفاً برای گروه‌بندی به کار می‌رود.

اگر فقط یک متغیر از داده‌ها اندازه‌گیری شده باشد، به جای ذکر «مقیاس متغیر» از واژه «مقیاس داده‌ها» استفاده می‌کنند.



شعارهای برتر
سال جهانی آمار



بهترین برنامه‌ریزی
مستلزم بهترین آمار

با آمار بهتر بفهمیم،
بهتر تصمیم بگیریم

کار در کلاس



نوع متغیر داده‌های زیر را مشخص کنید:

- (الف) محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسمای مذکور هستند.
ب) در یک دبیرستان، ۳۱۹ دانشآموز فارغ‌التحصیل وجود دارد. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم، صادق رتبه دهم و جواد رتبه چهارم را کسب کرده است و می‌دانیم که رتبه یک، بهترین است.
پ) دمای بدن ماهی‌های قزل‌آلای رودخانه هراز (برحسب درجه سلسیوس).
ت) طول ماهی‌های قزل‌آلای در رودخانه هراز.

تمرین



داده‌های زیر مربوط به یک نماینده مجلس است. در هریک از سؤالات زیر، نوع داده‌ها را مشخص کنید.

- (الف) نام نماینده حسین ایرانی است.
ب) این نماینده ۵۸ سال سن دارد.
پ) سال‌هایی که این نماینده در مجلس انتخاب شده است، ۱۳۸۶، ۱۳۹۰ و ۱۳۹۴ است.
ت) مجموع حقوق این نماینده در سال گذشته ۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است.
ث) این نماینده در حال بررسی لایحه پیشنهادی حفاظت از منابع آبی کشور است. گزینه‌های موردنظر، حمایت کامل، حمایت، بی‌طرف، مخالف و کاملاً مخالف است.
ج) وضعیت تأهل این نماینده: متأهل
چ) می‌گویند این نماینده در رأی گیری لایحه مرتبط با آموزش عمومی، هفتمین نفری است که از آن حمایت کرده است.

آمار چیست؟

علوم تجربی نظری کشاورزی و پزشکی نیازهای اساسی بشر را رفع می‌کنند. در این علوم، یقین کامل برای حل مسئله وجود ندارد، بسیار کاربردی‌اند و مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک پژوهش معمولاً به صورت دقیق بیماری را تشخیص نمی‌دهد و داروی بیماری نیز به همین وضع دچار است. ولی پژوهش بر اساس تجربه حکم به بیماری می‌دهد و دارو تجویز می‌کند و در اکثر مواقع نیز نتیجه می‌گیرد. از سوی دیگر در علوم ریاضی روابط به صورت صد درصد حاکم هستند و هیچ شک و شباهی به آن راه ندارد. وجود رابطه بین برخی پدیده‌ها در علوم تجربی باعث کشف حقایقی است که موجب پیشرفت آنها می‌شود. معمولاً روابط حاکم بر علوم تجربی را نمی‌توان به صورت ریاضی بیان کرد. علم آمار راهی برای بیان ریاضی چنین پدیده‌هایی است.

فعالیت



به نظر شما یک شهروند در زندگی روزمره خود از اطلاعات بیان شده در دو مثال زیر، چه استفاده‌ای می‌کند؟ این اطلاعات در رسانه‌ها منتشر شده‌اند.

سلامت

- بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل، افتادن یا زمین خوردن است.
- پنج درصد افراد به واکسن آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند.
- افراد سیگاری دو برابر دیگران در معرض سرطان قرار دارند.
- مصرف روزانه ۵ نوع میوه و سبزی بیشتر ویتامین‌های مورد نیاز بدن را تأمین می‌کند.

حمل و نقل

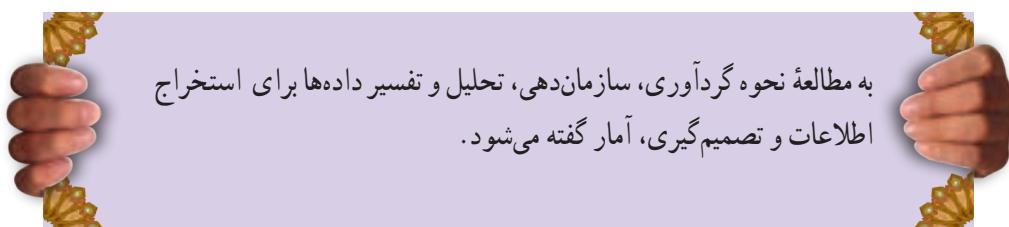
- اولین دلیل تماس با امداد خودرو فراموش کردن کلید داخل خودرو است.
- بیشتر راننده‌های مرد و زن یک کشور خارجی، در پشت چراغ قرمز به ترتیب با یعنی خود گلنگار می‌روند و در آینه نگاه می‌کنند.
- راندن بین خطوط راهنمایی در اتوبان‌ها باعث کاهش 30° درصدی ترافیک می‌شود.
- متوسط تعداد کشته‌های تصادفات در حدود 5° نفر در روز اعلام شده است.

چگونه این اطلاعات را به دست آورده‌اند؟ آیا تعریف دقیق کلمات پرونگ شده را حدس می‌زنید؟ جامعه، و پارامتر یا نمونه و آماره را در هر یک از مثال‌ها مشخص کنید.

تصمیم‌گیری یکی از مهم‌ترین جنبه‌های زندگی ماست. ما بر اساس اطلاعاتمان و ارزش‌هاییمان تصمیم‌گیری می‌کنیم. روش‌های آماری برای بررسی این اطلاعات به ما کمک می‌کنند. بعلاوه، آمار در شرایطی هم که

با عدم قطعیت در تصمیم‌گیری روبرویم، به یاری ما می‌آید. چگونه به اطلاعات گزارش شده در فعالیت قبل دست یافته‌اند؟ به عنوان مثال، اگر در صدد برآورد نسبت افرادی هستیم که به واکسن آنفلوآنزا واکنش شدید نشان می‌دهند، بدون تزریق بر روی همه افرادی که مایل به انجام آن هستند، آمار روش‌های مناسبی را پیش رویمان می‌گذارد. روش‌های آماری ما را قادر می‌سازند تا با نگاه کردن به اطلاعات به دست آمده از مجموعه کوچکی از افراد یا اقلام، برای گروههای بزرگ‌تری از این افراد یا اقلام تصمیم‌گیری کنیم. شیوه تحلیل داده‌ها، در کنار قواعد استنباطی، موضوعات اصلی مطالعات آماری را تشکیل می‌دهند.

به مطالعه نحوه گردآوری، سازماندهی، تحلیل و تفسیر داده‌ها برای استخراج اطلاعات و تصمیم‌گیری، آمار گفته می‌شود.



گفتنی است که روش‌های آماری به تنهایی نمی‌توانند معجزه کنند؛ این روش‌ها می‌توانند به ما کمک کنند تا تصمیم‌هایی بگیریم؛ اما نه هر تصمیمی. به یاد داشته باشید که حتی یک روش آماری مناسب، نمی‌تواند دقیق‌تر یا صحیح‌تر از داده‌ها و حقایق اصلی باشد. در نهایت، نتایج آماری باید توسط فردی که نه تنها روش‌ها، بلکه موضوع مورد بحث را کامل درک کرده باشد، تفسیر شود.

تمرین



۱. فرق بین داده و متغیر چیست؟
۲. داده‌های در سطح اسمی، کمی هستند یا کیفی؟
۳. فرق بین آماره و پارامتر چیست؟
۴. در یک جامعه آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازه یکسان از یک جامعه داشته باشیم، آیا می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟
۵. در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاخوری‌های گیاهخوار، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) غذا سفارش داده‌اند؟
 - (الف) متغیر را مشخص کنید.
 - (ب) این متغیر کمی است یا کیفی؟
 - (پ) جامعه آماری در اینجا چیست؟

۶. متغیرهای را در چهار مقیاس : اسمی، ترتیبی، فاصله‌ای و نسبتی دسته‌بندی کنید.

الف) مدت زمان پاسخ‌گویی به سوالات یک امتحان

ب) زمان اولین کلاس

پ) رشته تحصیلی

ت) مقیاس ارزیابی تحصیلی : ضعیف، معمولی و خوب

ث) نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)

ج) سن دانشآموز

لقمان و مرد پیاده

خواندنی

روزی لقمان در کنار چشمه‌ای نشسته بود. مردی که از آنجا

می‌گذشت از لقمان پرسید : چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید.

لقمان گفت : راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان شنیده است. دوباره سؤال کرد : مگر نشنیدی؟

پرسیدم : چند ساعت دیگر به ده بعدی خواهم رسید؟ لقمان گفت : راه برو. آن مرد پنداشت که لقمان

دیوانه است. برای همین راه خود را گرفت و رفت. زمانی که چند قدمی راه رفت، لقمان به بانگ بلند

گفت : ای مرد، یک ساعت دیگر بدان ده خواهی رسید. مرد گفت : چرا اول نگفتی؟ لقمان گفت :

چون راه رفتن تو را ندیده بودم، نمی‌دانستم تند می‌روی یا کند. حالا که دیدم دانستم که تو یک ساعت

دیگر به ده خواهی رسید. در این داستان ساده و قدیمی تمام اصول آماری رعایت شده است. چرا؟

نکته ظریف این داستان این است که لقمان فقط می‌گوید «راه برو» و توضیح دیگری نمی‌دهد. لقمان

نمی‌گوید که می‌خواهم راه رفتن تو را بینم تا از روی آن بگویم چه مدت طول می‌کشد تا به ده برسی، زیرا لقمان

فکر می‌کند این اطلاع ممکن است در راه رفتن آن مرد اثر بگذارد و در نتیجه سرعتی که لقمان تخمین می‌زند،

سرعت واقعی راه رفتن آن فرد نباشد و در نتیجه زمانی را که تخمین خواهد زد، مدت زمان دقیقی نباشد.

درس ۲

معیارهای گرایش به مرکز

فعالیت



امثال خیرین مدرسه چقدر به مدرسه کمک می‌کنند؟ مدیر مدرسه بر اساس اطلاعات سال‌های گذشته خود می‌گوید: معمولاً خیرین، به طور متوسط، ۱۰ درصد از درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می‌دهند. فرض کنید درآمد ماهانه حضار در انجمن خیریه این دیبرستان در سال جاری به ترتیب حروف الفبا به صورت زیر باشد:

آرمان	احمد	جوانه	حسنا	رسول	سبحان	نجمیه	درآمد (میلیون ریال)
۲۵	۲۲	۳۰	۳۲	۲۸	۱۲	۴۰	



پس برای پاسخ به سؤال طرح شده باید میانگین این اعداد را محاسبه کنید. میانگین همان چیزی است که به آن معدل هم می‌گویند. برای محاسبه آن باید همه درآمدهارا با هم جمع و بر تعداد افراد حاضر تقسیم کنید. اگر همه درآمدهارا با هم جمع کنید (۱۸۹) و بر تعداد افراد (۷) تقسیم کنید، به عدد میانگین ۲۷ میلیون ریال در ماه می‌رسید. در نتیجه ۱۰ درصد از درآمد سالانه برابر با $\frac{32}{4}$ است.

اگر n مشاهده به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، میانگین آنها را با نماد \bar{x} نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

کار در کلاس



۱. میانگین داده‌های $۵۰، ۴۰، ۳۰، ۲۰، ۱۰$ چقدر است؟
۲. اگر میانگین داده‌های $x، ۴۰، ۳۰، ۲۰، ۱۰$ برابر با ۳۰ شود مقدار x چقدر است؟
۳. میانگین اعداد $۵، ۴، ۳، ۲، ۱$ چقدر است؟
۴. میانگین اعداد $۵، ۸، ۶، ۴، ۲$ چقدر است؟
۵. میانگین اعداد $۹، ۸، ۷، ۶، ۵$ چقدر است؟
۶. میانگین اعداد $۹۰، ۸۰، ۷۰، ۶۰، ۵۰$ چقدر است؟
۷. آیا می‌توانید سه قاعده کلی از تمرین‌های قبل درباره خواص میانگین ذکر کنید؟

حال اگر یک میلیارد ریال، به انجمان خیریه دبیرستان ما باید، میانگین درآمد حضار چه تغییری می‌کند؟ (بیشتر مردم به او ثروتمند می‌گویند. آمارشناسان او را دورافتاده می‌نامند). درآمد او میانگین را تا حدود ۱۴۸ میلیون ریال در ماه بالا می‌آورد (دقیقاً $\frac{۱۴۸}{۶۲۵}$) و براساس شیوه تخمین گذشته، خیرین معادل ۱۷۸ میلیون ریال (دقیقاً $\frac{۱۷۸}{۳۵}$) را به دبیرستان کمک خواهند کرد، که غیرواقعی به نظر می‌رسد یا امکان محقق شدن آن ضعیف است.

داده دورافتاده: مقداری متفاوت با سایر مقادیر داده‌های است. معمولاً مقدار آن بسیار بزرگ‌تر یا بسیار کوچک‌تر از بقیه داده‌های است.

میانه

در مثال خیریه، داده دورافتاده باعث اشتباه مادر تخمین متوسط داده‌ها شد. میانگین، مرسوم‌ترین معیار گرایش به مرکز است که گاهی ممکن است مارا به اشتباه بیندازد، ولی می‌توان از معیار دیگری نیز برای بیان متوسط درآمد استفاده کرد. برای این منظور می‌توان از میانه استفاده کرد که داده وسطی داده‌های مرتب شده است. پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابراست، میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانه برابر با میانگین دو داده وسطی مرتب شده است. برای محاسبه میانه داده‌ها، قبل از ورود میلیارد، داده‌هارا از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. وسط این هفت عدد، یعنی چهارمین عدد میانه است. پس میانه داده‌ها عدد ۲۸ است که با میانگین داده‌ها تفاوت زیادی ندارد.

۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	ردیف
۴۰	۳۲	۳۰	۲۸	۲۵	۲۲	۱۲	درآمد مرتب شده

حال فرض کنید میلیارد در خیریه حضور دارد. داده وسط برای 8 عدد وجود ندارد یا به عبارتی 8 عدد، عدد وسط ندارند. پس میانگین داده‌های چهارم و پنجم را می‌گیریم. جایگاه چهارم درآمد، 28 و جایگاه پنجم آن 30 و در نتیجه میانه جدید درآمد، 29 است.

بیشتر افراد معتقدند که عدد 29 میلیون ریال، گویای مقدار صحیح متوسط درآمد افراد است و عدد



مد، مقداری از متغیر است که بیشترین فراوانی را دارد. مد یکی از معیارهای گرایش به مرکز است.

فروشنده‌گان پوشак از معیار مد بسیار استفاده می‌کنند. آنها با آمارگیری‌های خود در می‌بند که چه نوع پوشاكی مورد پسند مصرف‌کنندگان است؛ از همان پوشاك برای فروش سفارش می‌دهند.

در رأی‌گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است؛ چون موردي که بیشترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس‌جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیشترین فراوانی (رأی) را داشته باشد.

برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کیم. البته مد ممکن است منحصر به فرد نباشد.

۱۴۸ میلیون ریال کاملاً بی‌ربط است. پس ما به یک نتیجه می‌رسیم: اگر در داده‌هایمان، دورافتاده وجود داشت – دقیقاً مانند زمانی که یک میلیارد ر تصمیم به کار خیر می‌گیرد – باید از میانه استفاده کنیم.

تمرین



۱. میانه داده‌های $۱, ۱۰, ۱۴, ۸۶, ۲, ۶۸, ۹۹$ چقدر است؟
۲. میانه داده‌های $۱, ۱۰, ۱۴, ۸۶, ۲, ۶۸, ۹۹$ چقدر است؟

نکته اصلی در اینجاست: اگر در آمار در جایی به یک نتیجه شسته و رُفته برخوردید، خیلی احتیاط کنید. به دست آوردن «یک استنباط درست از داده‌ها تنها چیزی نیست که شما در یک بررسی آماری خواهان آن هستید خواسته دیگر ما برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری است».

تصور کنید که بهجای انحمن خیریه با یک بیمارستان سروکار داریم و داده‌ها بهجای مبالغ درآمد، هزینه‌های جراحی هستند. فرض کنید بهجای میلیارد، با یک بیمار روبروییم که گرفتار بعضی از مشکلات بعد از عمل است و مجموع هزینه‌هایش بالغ بر ۲۵۰ میلیون ریال است.



بیمار	هزینه‌های جراحی (میلیون ریال)	هزینه‌های جراحی (مرتب شده)
الف	۲	۱
ب	۵	۲
پ	۴۵	۳
ت	۷	۴
ث	۳۵	۵
ج	۳۰	۶
ج	۵۰	۷
ح	۲۵۰	۸



میانگین هزینه‌های جراحی این بیمارستان برابر با ۵۳ میلیون ریال و میانه آن برابر با ۳۲/۵ میلیون ریال است. اگر شما مدیر این بیمارستان بودید، کدام عدد برایتان از همه مهم‌تر بود؟ عدد ۳۲/۵ میلیون نشان‌دهنده هزینه‌های معمول نگهداری یک بیمار است، اگر بخواهیم بودجه سال بعد را با فرض این عدد بنویسیم، به احتمال زیاد با کسر بودجه مواجه می‌شویم. با قدری تفکر به میانگین و میانه، دلیل اینکه افراد از بیمه تأمین اجتماعی استفاده می‌کنند، روشن می‌شود؛ (میانه هزینه‌های سالیانه درمان معمولاً بسیار کمتر از حق بیمه پرداختی است، اما با نگاه به میانگین سالیانه هزینه‌ها، حساب می‌کنم که معامله خوبی کرده‌ام) و من همیشه کمربند اینمی را می‌بندم، اگرچه میانه تعداد زخمی‌ها در هر سفر با خودرو صفر باشد.

این نتیجه را نیز به یاد داشته باشید: کاهی هیچ آمار درست یا غلطی وجود ندارد، و همه چیز به این بستگی دارد که شما چرا می‌خواهید از آنها استفاده کنید.

کار در کلاس



با سه واژه: داده دورافتاده، میانه، و میانگین، ۵ جمله زیر را کامل کنید.

۱. آنچه اکثر مردم «حد و سط» می‌نامند، نزد آمارشناسان به معروف است. برای محاسبه، به داده‌های خود به عنوان فهرستی از اعداد نگاه کنید؛ همه اعداد را با هم جمع کنید و بر تعدادشان تقسیم کنید.

۲..... در واقع نقطه وسطی فهرست اعداد مرتب شده است. نیمی از اعداد مقادیر بزرگ تراز و نیمی دیگر مقادیر کوچک تراز هستند.

۳. زمانی با مواجه هستیم که مشاهده‌ای داشته باشیم که از الگوی داده‌هایمان پیروی نکند.

۴. وقتی با مواجه هستید، معمولاً بازتاب بهتری از داده‌ها می‌دهد تا

.....

۵. به طور کلی، برای برنامه ریزی و تصمیم گیری، بهتر از است.

شخصی دست راست خود را در یخچال و دست چپ خود را در فر کرده است. زمانی که از او درباره احساسش سؤال می‌شود پاسخ می‌دهد: «به طور متوسط خوب هستم». نتیجه اخلاقی این لطیفه آن است که یک عدد بهنهایی، معمولاً مجموعه‌ای از داده‌ها را به خوبی گشاند. بنابراین، اندیشه خوبی است که علاوه بر معیار گرایش به مرکز، سان و تغییرات داده‌ها را هم بیان کند.

خواندنی

درس ۳

معیارهای پراکندگی

فعالیت



می خواهیم کلاس های دهم سه دبیرستان را بر اساس نتایج آزمون جامعی که همزمان بین دانشآموزان ممتاز برگزار شده است، رتبه بندی کنیم. از هر دبیرستان ۱۰ نفر به تصادف انتخاب شده اند. نمره های آزمون جامع هر سه کلاس از ۱۲۰ نمره است.

داده های مربوط به سه کلاس دهم:

(الف) $\{65, 75, 73, 50, 60, 64, 69, 62, 67, 85\}$

(ب) $\{85, 79, 57, 39, 45, 71, 67, 87, 91, 49\}$

(پ) $\{43, 51, 53, 110, 50, 48, 87, 69, 68, 91\}$



میانگین سه کلاس را محاسبه کنید. به نظر شما پراکندگی نمره ها در کدام کلاس بیشترین و در کدام کلاس کمترین است؟ برای پاسخ به این سؤال، داده ها را روی سه محور موازی نمایش دهید. کدام دبیرستان نتایج بهتری با اطلاعات داده شده کسب کرده است؟ چرا؟ مثلاً آگر والدین برای ثبت نام فرزند بازیگوش خود در سال آینده بخواهند بر اساس این نتایج، یکی از مدرسه ها را انتخاب کنند، مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمره ها در آن کمتر است. در مقابل، برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می خواهد مدرسه را انتخاب کند، مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمره ها در آن بیشتر باشد. چرا؟

یک معیار معمول برای سنجش میزان پراکندگی که نشان دهنده تغییرات داده های مورد مطالعه است، انحراف معیار است. انحراف معیار را با به کار گیری یک فرمول، از داده ها به دست می آوریم. (اختلاف هر عدد با میانگین داده ها را حساب کنید، به توان ۲ برسانید؛ میانگین اعداد حاصل را به دست آورید، و سپس جذر بگیرید). توان دوم انحراف معیار را واریانس می نامند. داده ها در شکل زیر رسم شده اند. همچنین انحراف معیار، نمودهای سه کلاس، محاسبه و در شکل نشان داده شده است.

اگر n مشاهده را به صورت x_1, x_2, \dots, x_n داشته باشیم، انحراف معیار آنها را با نماد σ (سیگما) نشان می‌دهند، که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

کار در کلاس

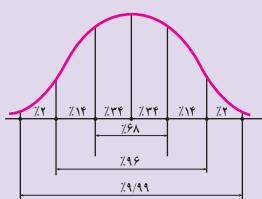


۱. اگر داده‌ها با هم برابر باشند، انحراف معیارشان برابر با صفر خواهد شد. چرا؟
 ۲. انحراف معیار نمره‌های آزمون جامع سه کلاس را می‌توانید با تکمیل جدول زیر محاسبه کنید.



پراکندگی در خم بهنچار (منحنی نرمال)

اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، بافت‌نگاشت (هیستوگرام) آنها را می‌توان به صورت یک خم تصویر کرد. اگر این خم به صورت یک «زنگ» باشد، به آن خم بهنچار گفته می‌شود. خداوند سبیاری از پدیده‌ها را بهنچار آفریده است. مثلًا طول قد یا وزن داش آموزان بهنچارند؛ یعنی بافت‌نگاشتی زنگی شکل دارند. خواص این خم، کمک زیادی برای تصمیم‌گیری بر اساس داده‌ها یا کسب اطلاعات از آنها می‌کند. به یاد دارید که گفته شد اگر انحراف معیار داده‌ها باشد، چند درصد از داده‌ها به طور تقریبی بین میانگین که در واقع گرانیگاه با مرکز نقل بافت‌نگاشت است و چه ضرایبی از انحراف معیار قرار دارد؟ این اطلاعات را به طور مختصر در شکل زیر ملاحظه می‌کنید (مقادیر روی نمودار تقریبی هستند):



فعالیت



حتماً بر روی قوطی‌ها یا پاکت‌های مواد غذایی یا بهداشتی اعدادی به صورت زیر مشاهده کرده‌اید. به نظر شما هر یک از این اعداد چه چیزی را نشان می‌دهند؟
 25 ± 1 گرم

عدد 25 وزن خالص ماده غذایی است که قرار است به دست مصرف‌کننده برسد؛ ولی معمولاً این‌چنین نیست. کمی خطأ اجتناب‌ناپذیر است. این خطأ چقدر است و آن را چگونه محاسبه کنیم؟ اگر وزن و انحراف معیار تعداد زیادی از محتوای پاکت‌ها یا قوطی‌های یک تولیدی را محاسبه کنیم، دو برابر آن عدد 1 است؛ یعنی عدد 1 دو برابر انحراف معیار مواد غذایی در بسته‌بندی‌های مختلف است. به عبارت دقیق‌تر اگر ما 100 قوطی حاوی این ماده غذایی را وزن کنیم، انتظار داریم حداقل 96 تا از آنها وزنی بین 24 و 26 گرم داشته باشند. درج چنین اعدادی بر روی کالاها از الزامات استاندارد هر کشوری است. چگونه به عدد 96 رسیده‌اند؟

برای پی بردن به میزان تغییراتی که داریم، معمولاً با محاسبه مقدار انحراف از میانگین، اطلاعات دقیق‌تری در خصوص میانگین و انحراف معیار به دست خواهیم آورد. برای این منظور از یک قانون مشهور در آمار استفاده می‌کنیم: تقریباً 96 درصد از داده‌ها در فاصله «دو انحراف معیار از میانگین» هستند. این جمله یعنی اگر فاصله‌ای تعریف کنیم که ابتدای آن $\bar{x} - 2s$ و انتهای آن $\bar{x} + 2s$ باشد، تقریباً 96 درصد داده‌ها در این فاصله قرار دارند. این مانند آن است که بگوییم 4 درصد از نمره‌ها بیش از دو برابر انحراف معیار از میانگین فاصله دارند. البته مشابه همین قانون در شکل‌های قبل برای یک برابر انحراف معیار نمایش داده شده است. در این حالت، قانون قبل به «تقریباً 68 درصد از مشاهدات در فاصله یک انحراف معیار از میانگین هستند»، تغییر می‌کند.

دو برابر انحراف از میانگین را روی همان شکل رسم کنید.



کار در کلاس

جدول زیر را تکمیل کنید.

شعارهای برتر
سال جهانی آمار



آمارهای دقیق،
پشتواهه توسعه پایدار

آمار، ابزاری علمی
در توسعه مبتنی بر
دانایی

$(\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma)$	تقریباً ۹۹/۹ درصد از مشاهدات در فاصله سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
$(\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma)$	تقریباً از مشاهدات در فاصله انحراف معیار از میانگین قرار دارند.
.....	تقریباً از مشاهدات در فاصله یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند.

فعالیت



می خواهیم با همان مثال خیره درس قبل، بحث را ادامه دهیم. اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها کوچک باشد، بدین معناست که درآمد همه افراد به هم نزدیک است. اگر انحراف معیار بزرگ باشد، بدین معناست که درآمد افراد آن انجمن، بسیار متفاوت است. انحراف معیار درآمد اعضا به صورت زیر محاسبه می‌شود.

به کمک جدول زیر، این کار را انجام دهید.

مشاهدات	انحراف مشاهدات از میانگین		انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲	
	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد	قبل از ورود میلیارد	بعد از ورود میلیارد
۴۰	۴۰			
۱۲	۱۲			
۲۸	۲۸			
۳۲	۳۲			
۳۰	۳۰			
۲۲	۲۲			
۲۵	۲۵			
	۱۰۰۰			

زمانی که میلیارد وارد انجمن خیریه می‌شود، انحراف معیار داده‌ها برابر است با این دو مقدار با هم اختلاف زیادی دارند. چرا و چه باید کرد؟ زمانی را به خاطر بیاورید که معیار گرایش به مرکز را برای این داده‌ها محاسبه کردیم. برای رفع آن مشکل بهجای میانگین، میانه را به کار بردیم. مشابه همان کار را می‌توانیم انجام دهیم. معیار پراکندگی‌ای که تعریف می‌شود، انحراف معیار نیست. ما آن را دامنه میان‌چارکی می‌نامیم و با IQR نشان می‌دهیم. «میانه» جایی در وسط داده‌های است؛ به‌طور مشابه، چارک‌ها هم یک‌چهارم و یک‌دوم و سه‌چهارم مشاهدات هستند. به عبارت ساده‌تر اگر برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه حساب کنیم، همان چارک اول است و به همین صورت میانه داده‌های بعد از میانه، چارک سوم خواهد بود. چارک دوم هم همان میانه است. برای سادگی از نمادهای Q_1 و Q_2 و Q_3 به ترتیب برای چارک اول، میانه (چارک دوم)، و چارک سوم استفاده می‌شود.

جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید.

σ انحراف معیار	$IQR = Q_3 - Q_1$ دامنه میان‌چارکی	Q_3 چارک سوم	Q_2 میانه	Q_1 چارک اول	درآمد ماهانه اعضای انجمن
					درآمد بعداز ورود میلیارد

این اعداد، امکان مشاهده چند چیز را به شما می‌دهند: میلیارد مسبب درهم‌ریختگی میانگین درآمد و انحراف معیار بوده است؛ اما میانه و دامنه میان‌چارکی همچنان ثابت مانندند. این یکی از دلایلی است که ما می‌گوییم اگر داده دورافتاده داشته باشیم، بهتر است از میانه (و در نتیجه دامنه میان‌چارکی) بهجای میانگین استفاده کنید. در این صورت، نتیجه بهتری از داده‌ها به دست می‌آورید. همچنین زمانی که تعداد داده‌ها زیاد باشد، می‌توانید از تفاوت معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی نتیجه بگیرید که داده دورافتاده وجود داشته است. دلیل دیگر استفاده از میانه و دامنه میان‌چارکی، تفسیر ساده‌آنها در مقابل تفسیر میانگین و انحراف معیار است. اگر نتایج مطالعات مربوط به سلطان را ملاحظه کنیم، اولین چیزی که در گزارش‌ها مشاهده می‌کنیم، مشخصات عمومی بیماران مورد مطالعه است: آنها چند سال سن دارند؟ نسبت مردان به زنان چقدر است؟ چند نفر بیماری‌شان زود تشخیص داده شده و در مراحل ابتدایی است و چند نفر بیماری‌شان عود کرده است؟ اگر در گزارش، میانگین و انحراف معیار را ذکر کنیم، هر خواننده‌ای می‌تواند از روی اطلاعات داده‌شده، با توجه به دو قانون ذکر شده، نحوه توزیع سنین بیماران را به دست آورد. اما نکته در اینجاست که آنها این کار را نخواهند کرد. به ندرت می‌توانید یک پژوهش متخصص سلطان بسیار پرمشغله را در حال فکر کردن به این مسئله بینید که، «خوب ... میانگین $64/3$ و انحراف معیار $9/8$ است؛ 68 درصد از بیماران در فاصله یک‌برابر انحراف معیار از میانگین هستند؛ این یعنی، $64/3 \pm 9/8$ ، که می‌شود...، یک لحظه صبر کنید...، ماشین حساب کجاست؟» شما فقط می‌توانید با نگاهی سریع به میانه و دامنه میان‌چارکی، تصور خوبی نسبت به توزیع



داده‌های پیش رویتان به دست آورید. به عبارت دیگر، میانه و دامنه میان‌چارکی در توصیف مجموعه داده‌ها سیار مفیدند و این دقیقاً همان کاری است که ما از آنها انتظار داریم انجام دهند: همه آمارهایی که در اینجا ذکر شد (میانگین‌ها، میانه‌ها، انحراف‌های معیار، دامنه‌های میان‌چارکی) تحت عنوان آمار توصیفی شناخته می‌شوند.

کار در کلاس



جمله‌های زیر را کامل کنید:

۱. میانگین‌ها و میانه‌ها برای توصیف مجموعه داده‌ها مفیدند. ا نوعی از معیارهای گرایش به مرکز هستند.
۲. شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می‌خواهید، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار، است.
۳. معیار پراکندگی که معمولاً ب میانگین بیان می‌شود، است.
۴. معیار پراکندگی که معمولاً ب میانه بیان می‌شود، نام دارد.
۵. و اطلاعات سریعی درباره داده‌ها بدون نیاز به هرگونه محاسبه می‌دهند.
۶. آمارهای که برای توصیف یک مجموعه داده، میانگین‌ها و میانه‌ها، انحرافات معیار و دامنه‌های میان چارکی به کار می‌روند، نام دارد.
۷. درصد داده‌ها قبل از میانه و درصد داده‌ها بعد از میانه قرار دارند.
۸. ۷۵ درصد داده‌ها قبل از یا بعد از قرار دارند.
۹. ۲۵ درصد داده‌ها قبل از یا بعد از قرار دارند.
۱۰. ۵ درصد داده‌ها بین و قرار دارند.
۱۱. تقریباً ۹۶ درصد از مشاهدات در فاصله از میانگین هستند.
۱۲. تقریباً ۶۸ درصد از مشاهدات در فاصله از میانگین هستند.



تمرین

۱. یک نمونه ۲ تابی از اعداد ۱ تا ۶ انتخاب کنید. اگر بخواهید این نمونه حتماً تصادفی باشد، چه راهی را پیشنهاد می‌کنید. اگر بخواهید واحدهای انتخابی این نمونه تصادفی، تکراری نباشند، چگونه این کار را انجام می‌دهید؟

۲. سوال ۱ را برای اعداد ۱ تا ۳۶ تکرار کنید. (راهنمایی: می‌توانید از پرتاب دو تاس به عنوان روشی برای انتخاب اعداد ۱ تا ۳۶ استفاده کنید.)

۳. مجموعه افراد فامیل درجه اول و درجه دوم خود را بنویسید و آنها را شماره‌گذاری کنید. سپس یک نمونه ۴ تابی از این جامعه انتخاب کنید. موضوعاتی زیر را برای نظرخواهی از آنان در نظر بگیرید.
درباره بهترین روش گردآوری داده‌ها برای این فرضیه‌ها تصمیم بگیرید:
(الف) اکثر مردم فکر می‌کنند «حداکثر سرعت در بزرگراه‌ها باید تعیین شود».
(ب) آیی، رنگ مورد علاقه بیشتر مردم برای ماشین است.
(پ) گوش دادن به موسیقی کلاسیک در زمان مطالعه، به یادگیری کمک می‌کند.
(ت) بیشتر تصادفات اتومبیل‌ها را رانندگان با سن کمتر از ۲۵ سال مرتکب می‌شوند.
(ث) رژیم گرفتن، باعث کاهش هوش می‌شود.

۴. دو موضوع برای هر یک از روش‌های گردآوری داده‌ها بیان کنید.
(الف) از طریق مصاحبه (ب) از طریق مشاهده (پ) از طریق دادگان (ت) از طریق پرسشنامه

۵. کدام یک از نمونه‌گیری‌های زیر، یک نمونه‌گیری تصادفی است. در هر یک واحدهای آماری، جامعه و نمونه را مشخص کنید.
(الف) با همه مأموران یک پاسگاه پلیس برای آگاهی از نظرشان راجع به تخلفات مصاحبه شد.
(ب) با بچه‌هایی که وارد یک پارک بازی می‌شدند، پنج در میان مصاحبه شد تا وسیله بازی مورد علاقه کودکان بررسی شود.
(پ) برای بررسی PH شامپوهای تولیدی یک کارخانه، شامپوها را صد در میان مورد آزمایش قرار دادیم.

۶. برای تحقیقات و بررسی‌های زیر، جامعه را مشخص و روش نمونه‌گیری پیشنهاد کنید.
(الف) پیدا کردن درصد بیکاران استان مازندران (ب) مردان کدام شامپو را بیشتر ترجیح می‌دهند?
۷. می‌خواهیم مدت زمانی را که دانشآموزان کلاس شما در طول یک هفته صرف مطالعه کتاب‌های غیردرسی می‌کنند، آمارگیری کنیم.
(الف) برای این آمارگیری، جامعه را مشخص کنید.

- ب) یک روش نمونه‌گیری برای انتخاب نمونه معرفی کنید.
 پ) از چه روشی برای گردآوری اطلاعات استفاده می‌کنید؟
 ت) اندازه (تعداد واحدهای) این جامعه چقدر است؟
 ث) اندازه نمونه مورد بررسی چقدر است؟ آیا این تعداد برای بررسی مورد نظر مناسب است؟ در صورت مناسب بودن، روش نمونه‌گیری و نمونه خود را اصلاح کنید.
 ج) متغیر مورد مطالعه در این مسئله چیست؟ توضیح دهید.
 چ) متغیر مورد مطالعه از چه نوعی است؟

۸. نوع هر یک از متغیرهای زیر را مشخص و بهترین مقیاس اندازه‌گیری آنها را ذکر کنید.

الف) رنگ اتمبیل‌های موجود در یک نمایشگاه اتمبیل

ب) درجه حرارت کلاس شما در روزهای سال

پ) گنجایش آب یک باری مخزنی (تانکر)

ت) تعداد شکایات رسیده به یک پاسگاه پلیس

ث) درآمد دانشجویان شاغل به کار

ج) وضعیت تأهل کارمندان یک شرکت

چ) سن دانشجویان شرکت کننده در یک دوره هنری

۹. میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است :

حقوق میلیون ریال	سمت	مدیر شرکت	معاون	حسابدار	بازاریاب	۲ نفر فروشنده	منشی	مستخدم
۱۰۰	سمت	۶۰	۳۰	۲۰	۲۰	۱۲	۸	۸

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین پرداخت حقوق در این شرکت بیشتر از ریال است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای پرداخت حقوق زیاد در این شرکت باشد؟ چرا؟
 کدام‌یک از معیارهای گرایش به مرکز برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت مناسب‌تر است؟

۱۰. نمره‌های درس فیزیک داشت آموزی در طول سال برابر است با:

۱۷	۱۹	۱۸	۷	۱۸	۱۹
----	----	----	---	----	----

الف) میانه و میانگین را برای نمره‌های این داشت آموز حساب کنید.

ب) کدام‌یک از شاخص‌های فوق، شاندنه و وضع این داشت آموز در درس فیزیک است؟

پ) اگر معلم درس فیزیک این داشت آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او بدهد، برای اینکه میانگین وی در این درس، بیشتر از ۱۸ شود، او چه نمره‌ای در این امتحان باید کسب کند؟

۱۱. دو دسته داده زیر، قیمت کالایی را در دو بازار جداگانه برحسب هزارریال نشان می‌دهد.

بازار الف	بازار ب										
۸	۱۳	۹	۱۲	۱۰	۱۱	۱۲	۹	۱۰	۱۱	۱۰	۱۰
۱۰	۱۳	۸	۱۰	۹	۱۱	۱۰	۱۰	۱۱	۹	۱۰	۱۰

(الف) در کدام دسته پراکندگی بیشتر است؟

(ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

(پ) آیا دامنه تغییرات با پراکندگی مشاهده شده در قسمت «الف» همخوانی دارد؟

(ت) ترجیح می‌دهید از کدام بازار خرید کنید؟ چرا؟

(ث) اگر داده‌هارا در اختیار نداشته باشید، آیا فقط با داشتن دامنه تغییرات می‌توانید تصمیم‌گیری کنید؟

فصل پنجم

نمایش داده‌ها

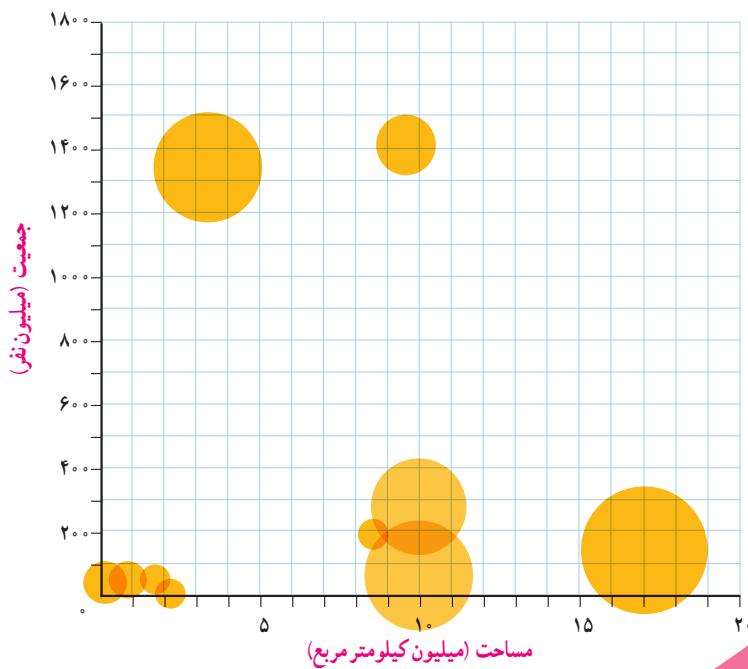
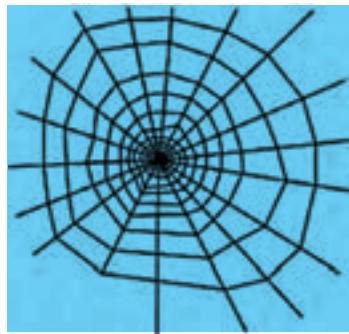


نمودارهای یکمتغیره

درس ۱

نمودارهای چندمتغیره

درس ۲



درس ۱

نمودارهای یک متغیره

فعالیت

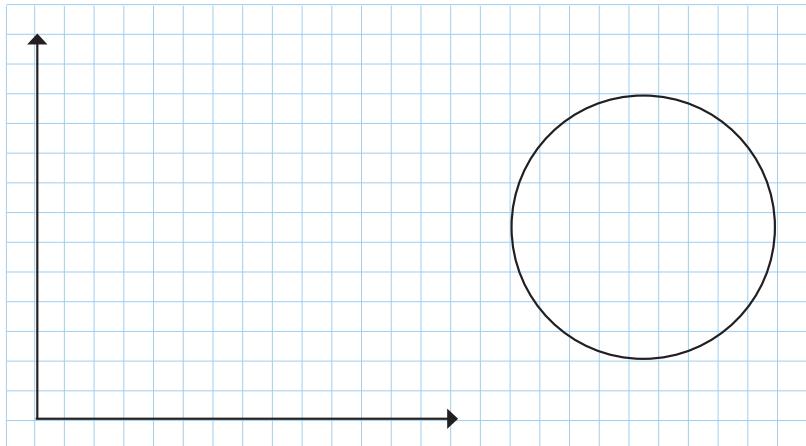


در کلاس درس قرار شد هر دانشآموز با توجه به داده‌های موجود در رسانه‌ها، درباره یک موضوع اجتماعی با فرهنگی گزارشی در قالب یک شکل ارائه کند. مثلاً حسن در مورد موضوع علل آسیب‌دیدگی ۲۰۰ نفر در منازل اطلاعاتی کسب کرده بود. او گزارش خود را در یک شکل خلاصه کرده است. او با اطلاعاتی که در اختیار داشته است، ابتکار جالبی به خرج داده و نمودار زیر را رسم کرده است. از این نمودار چه اطلاعاتی می‌توان کسب کرد؟ به عنوان مثال، بیشترین آسیب‌دیدگی در منازل بر اثر افتادن یا زمین خوردن است.



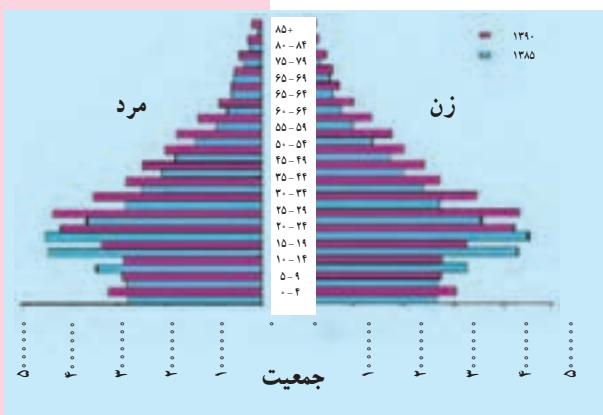
علم از موضوع انتخابی و نمایش ترتیبی مکعب‌ها بر حسب طول آنها رضایت کامل داشت؛ ولی از دانش‌آموزان درخواست کرد که اگر می‌توانند پیشنهادی برای بهتر شدن آن ارائه کنند. آیا شما قبل از دیدن نظرها می‌توانید چند پیشنهاد برای بهبود نمودار ارائه کنید؟

نمودار میله‌ای انواع آسیب‌دیدگی را بر حسب تعداد رسم کنید. مراحل رسم نمودار دایره‌ای را به یاد بیاورید و آن را در چند گام خلاصه کنید. نمودار دایره‌ای در صد آسیب‌دیدگی‌ها را نیز رسم کنید.



جمع‌بندی پیشنهادها براساس آموخته‌های ما در سال‌های گذشته به صورت زیر است:

- رسم مکعب مستطیل به جای مستطیل (نمودار سه بعدی به جای دو بعدی) خوب نیست، چون ممکن است اطلاعات دقیق را به بیننده انتقال ندهد.
- برای متغیرهای اسمی، نمودار میله‌ای بهتر از بافت‌نگاشت (هیستوگرام) است.
- زمانی که درصد را گزارش می‌کنیم، بهتر است از نمودار دایره‌ای استفاده کنیم تا بهتر بتوانیم مقایسه انجام دهیم؛ البته به شرطی که بیشتر از ۶ مقدار نداشته باشیم.



مقایسه هرم سنی جمعیت ایران در سال‌های ۱۳۸۵ و ۱۳۹۰

کار در کلاس



در کلاس درس خود، متوسط مصرف روزانه انواع میوه‌ها یا سبزی‌های را برای یکی از هم‌کلاسی‌های خود، به یکی از روش‌های فصل قبل جمع‌آوری کنید و آنها را با یک نمودار مناسب نمایش دهید. مثلاً اگر در روز شنبه ۳، یکشنبه ۶، دوشنبه ۵، سه‌شنبه ۴، چهارشنبه ۲، و پنج‌شنبه ۷ و جمعه ۸ نوع میوه یا سبزی خورده باشد، میانگین آنها برابر با $5/14$ است که آن را در نظر می‌گیریم.

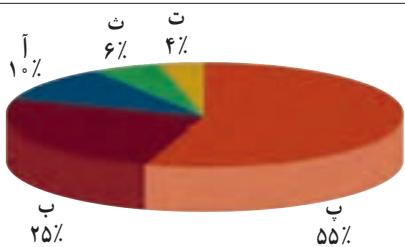
نمایش داده‌ها

نمایش داده‌ها روشی برای کمک به استخراج اطلاعات از داده‌ها با حس بینایی است.

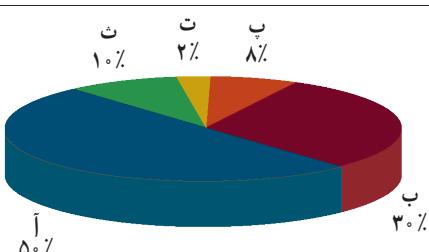
فعالیت



درصد تعداد کاربران اینترنت در پنج کشور



درصد کاربران اینترنت نسبت به کل جمعیت در پنج کشور

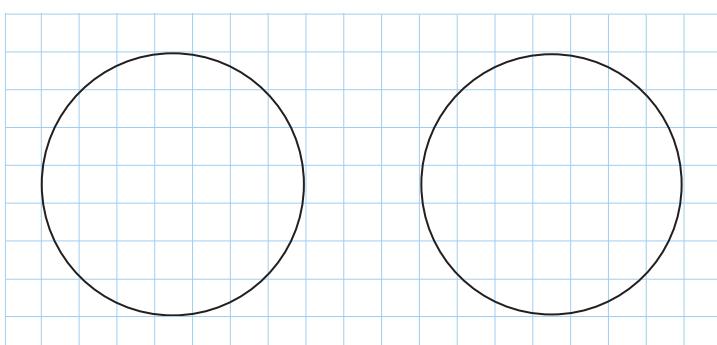


از نمودار دایره‌ای مقابل، برای نشان دادن وضعیت استفاده از اینترنت در پنج کشور استفاده شده است. کدام کشور دسترسی بیشتری به اینترنت دارد؟ آیا اطلاعات این نمودار برای پاسخ به این سؤال کافی است؟ چه اطلاعاتی از این نمودار کسب می‌کنید؟

اگر عامل جمعیت را در نظر بگیریم، واقعیت میزان توسعه اینترنت و میزان استفاده از آن در این کشورها را می‌توان به صورت رو به رو نشان داد.

آیا برداشت شما از نمودار قبل تغییر کرد؟

به نظر شما رسم نمودار دایره‌ای به صورت دو بعدی که در سال‌های گذشته با آن آشنایی شده‌اید، بهتر است یا سه بعدی مانند دو نمودار قبلی؟



می‌گویند ارزش یک تصویر به اندازه هزار کلمه است. انتقال اطلاعات از طریق نمایش داده‌ها بسیار جذاب‌تر و سریع‌تر از ارائه همان اطلاعات در جدول‌هاست. نمودارها باید به گونه‌ای رسم شوند که از آنها سوء برداشت نشود و بی‌طرفی را حفظ کنند.

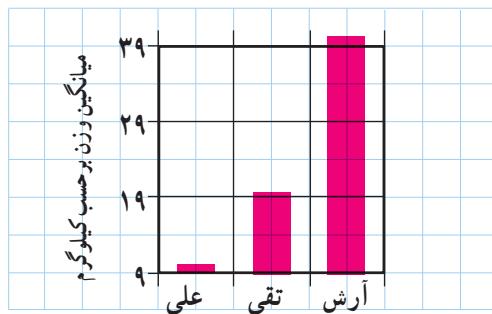
خواندنی

کار در کلاس



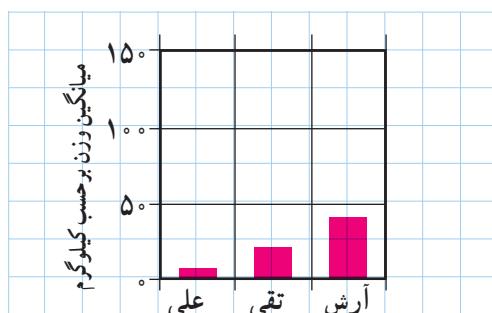
بازی با نمودارها

۳. اگر نقطه شروع محور عرض‌ها را از صفر به عدد ۹ تغییر دهیم، چه تغییری در نتیجه حاصل می‌شود؟



در واقع اعداد همان اعداد قبلی‌اند، اما محور عرض‌ها تغییر کرده است. اکنون این‌طور به نظر می‌رسد که کدوتبل‌های

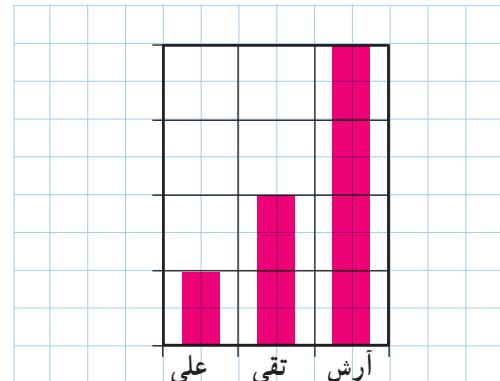
۴. اگر کسی بخواهد دیگران را مقاعده کند که همه کدوتبل‌ها حدوداً به یک اندازه‌اند، چه کاری می‌تواند بکند؟ به این نمودار نگاه کنید:



اعداد تغییری نکرده‌اند؛ اما محور عمودی دوباره تغییر کرده است. چه تغییری کرده است؟

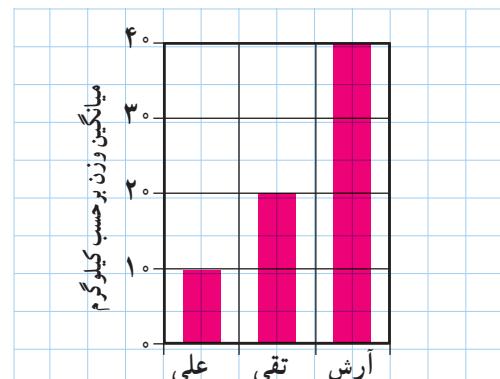
به کارگیری غلط نمودارها، راه ساده‌ای برای گمراه کردن افراد است. افراد مایل‌اند به نمودارها به عنوان روشی سریع برای ارزیابی مجموعه‌ای از اعداد بنگرنند. اما مراقب باشید که فریب نخورید.

۱. باید از کدوتبل‌های باغهای آرش، تقی و علی استفاده کنیم. اولین نمودار به صورت زیر است:

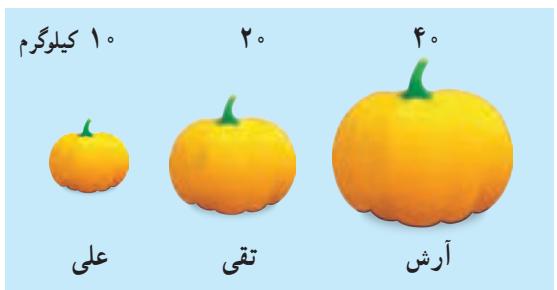


این نمودار چه چیزی را نمایش می‌دهد؟ وزن، حجم، پهنا یا ارتفاع کدوتبل‌های را؟

۲. نمودار زیر چه تفاوتی با نمودار بالا دارد؟



این نمودار به چه اطلاعات بیشتری اشاره می‌کند؟



گاهی برای نمایش داده‌ها از یک تصویر استفاده می‌شود، مانند شکل رو به رو.

این تصویر، داده‌ها را از شکل طبیعی خارج می‌کند. برای نمایش تفاوت میانگین وزن‌ها، این تصویر ارتفاع هر کدوتبل را، برای نشان دادن وزنش، تغییر می‌دهد. ارتفاع

کدوتبل تقی (با وزن ۲۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتبل علی (۱۰ کیلوگرم) است، ارتفاع کدوتبل آرش (۴۰ کیلوگرم) دو برابر ارتفاع کدوتبل تقی و چهار برابر ارتفاع کدوتبل علی است. آیا این شکل، اطلاعات مورد نظر را به درستی به بیننده منتقل می‌کند؟ (راهنمایی: فرمول‌های محاسبه و مساحت را به یاد آورید: مساحت مستطیل = طول × عرض. مساحت دایره = πr^2)

شما این شکل را چگونه رسم می‌کنید تا اطلاعات موجود را بهتر نمایش دهد؟
به نظر شما آیا رنگ در انتقال نظرخانه به بیننده تأثیر دارد؟

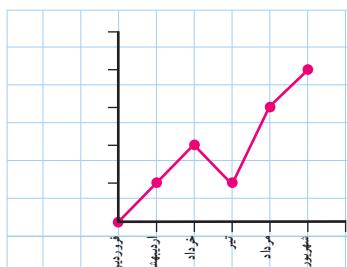
تمرین



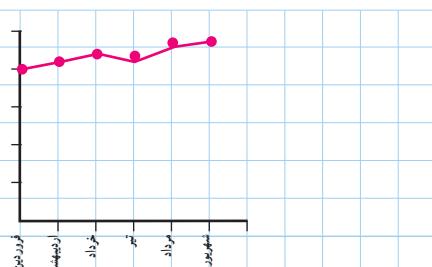
۱. سود خالص یک شرکت خدماتی در شش ماه نخست سال بر حسب میلیارد ریال به صورت زیر است:

شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین
۲/۴	۲/۳	۲/۱	۲/۲	۲/۱	۲/۰

خریدار و فروشنده سهام این شرکت، نمودارهای زیر را رسم کرده‌اند. اعداد روی محورها را مشخص کنید:

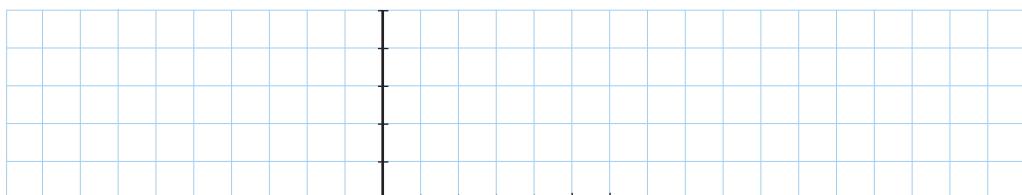


نمودار از دید فروشنده



نمودار از دید خریدار

به نظر شما کدامیک منطقی‌تر است؟ آیا می‌توانید نموداری بهتر از این دو نمودار رسم کنید؟



۲. اگر درصد یافراوانی متغیرهایی که نمودارهای آنها را رسم می‌کنیم، نزدیک به هم باشند، آیا نمودار میله‌ای برای مقایسه مناسب‌تر است یا نمودار دایره‌ای؟

۳. رسم نمودارهای میله‌ای و دایره‌ای برای داده‌های کمی مناسب‌تر است یا برای داده‌های کیفی؟

فعالیت



مریم گروه (تیم) بسکتبال شهر می‌خواهد بر اساس نتایج بازی‌های قبلی دو بازیکن، نسبت به حضور یکی از آنها در بازی بعدی تصمیم بگیرد. امتیازهای کسب شده توسط این دو بازیکن به صورت زیر است.

۱۱ بازی بازیکن الف:

امتیاز کسب شده	۳۰	۱۳	۱۱	۱۰	۷	۶	۳
تعداد بازی	۱	۱	۱	۳	۲	۱	۲

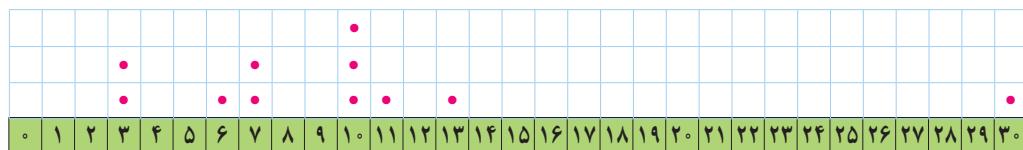
۱۰ بازی بازیکن ب:

امتیاز کسب شده	۱۲	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷
تعداد بازی	۱	۱	۲	۲	۲	۱	۱

داده‌های مرتب شده را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

بازیکن الف	۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰
بازیکن ب	۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۳	

اگر هر یک از اعداد را به صورت نقطه بالای یک محور علامت بزنیم، به نمودار حاصل، نمودار نقطه‌ای داده‌ها می‌گویند. نمودار نقطه‌ای امتیازهای بازیکن الف را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.



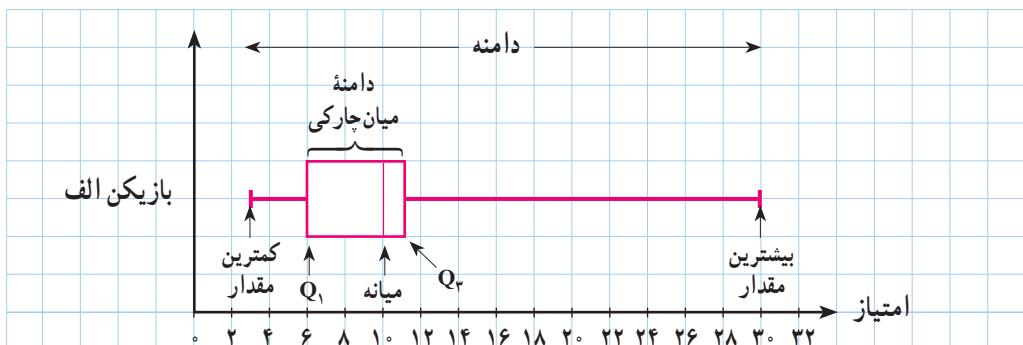
نمودار نقطه‌ای داده‌ها را برای بازیکن ب بر روی محور نمایش دهید.



به نظر شما کدام بازیکن بهتر است؟ البته این سؤال، کلی است و اگر به شما بگوییم این بازی آخر است یا گروه مقابل تاکنون امتیاز بیشتری نسبت به گروه شهر کسب کرده است، ممکن است پاسخ سؤال عوض شود. در فصل گذشته برای تصمیم درست‌تر، از معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی به طور هم‌زمان استفاده می‌شد. پس خالی از لطف نیست که معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی مجموعه‌های گوناگون از داده‌ها را به شکل تصویری مورد مقایسه قرار دهیم. امتیازهای بازیکن الف را در نظر بگیرید. برای این منظور، کمترین مقدار، چارک اول، میانه، چارک سوم و بیشترین مقدار را محاسبه کنید و روی یک محور نمایش دهید. برای مشخص کردن حدود دامنه میان چارکی، یک جعبه به عرض دلخواه رسم می‌کنیم. برای مشخص کردن دامنه دو خط، از دو طرف جعبه به کمترین مقدار و بیشترین مقدار داده‌ها وصل می‌کنیم. با مشخص کردن میانه روی جعبه، نمودار جدیدی ارائه کرده‌ایم به نام نمودار جعبه‌ای. برای این منظور، خطی عمودی بکشید تا میانه مشخص شود.



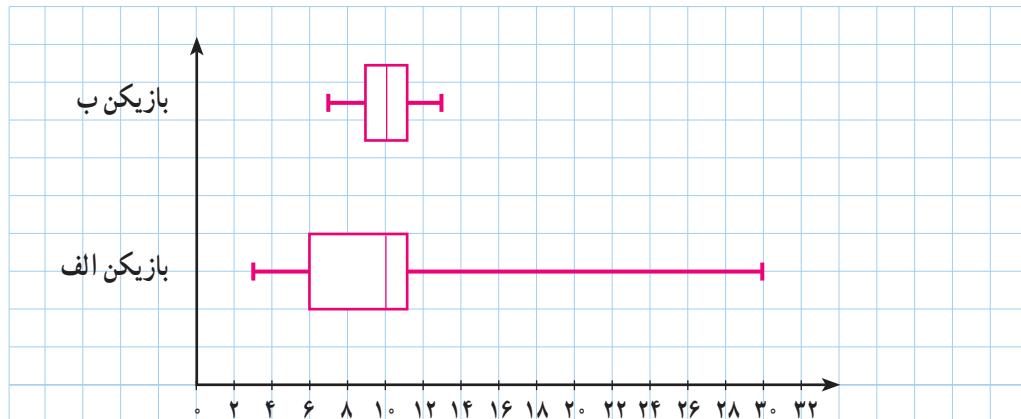
از آنجا که دو خط دوطرف جعبه شبیه سبیل گربه است، بعضی موقع به آن نمودار جعبه و سبیل گفته می‌شود.



این نمودار، دامنه، دامنه میان چارکی و میانه مجموعه داده‌ها را به طور هم‌زمان نشان می‌دهد. بیش از یک مجموعه داده را می‌توان در یک نمودار نشان داد. این بدان معناست که این روش برای مقایسه داده‌ها بسیار عالی است.

اگر داده‌ها در برگیرندهٔ دادهٔ دورافتاده بودند، دامنهٔ وسیع‌تر می‌بود. در نمودار جعبه‌ای، طول سبیل‌ها با توجه به مرزهای بالا و پایین افزایش می‌باید. با نگاه کردن به سبیل‌های نمودار جعبه‌ای، می‌توانید به نامتقارن بودن داده‌ها بپرسید.

نمودار جعبه‌ای امتیازهای دو سکتبالیست در اینجا نشان داده شده است. دامنهٔ این امتیازها را مقایسه کنید. اگر مجبور بودید ازین این دو بازیکن، یک نفر را انتخاب کنید، کدام را انتخاب می‌کردید؟ اکنون بهتر می‌توانید به سوال قبل در وضعیت‌های مختلف گروه مقابله با حساسیت بازی تصمیم‌گیری کنید.



امتیازهای بازیکن ب دامنهٔ نسبتاً کوچکی دارد، ولی میانهٔ هر دو برابر با 10° است. امتیازهای بازیکن الف دامنهٔ بزرگی دارد. این بازیکن، گاهی امتیازهایی بسیار بیشتر از بازیکن ب می‌آورد، و گاهی هم بسیار کمتر.

بازیکن ب ثبات بیشتری دارد و معمولاً امتیازهایش بیشتر از بازیکن الف است (میانه‌ها و دامنهٔ میان‌چارکی را با هم مقایسه کنید)، پس بهتر است بازیکن ب را انتخاب کنیم.

نمودار جعبه‌ای، روشنی سودمند برای نمایش دامنه‌ها و چارک‌های داده‌هاست. یک جعبه، مکان قرارگیری چارک‌ها و دامنهٔ میان‌چارکی را نشان می‌دهد و سبیل‌ها کمترین و بیشترین مقادیر داده‌هارا نشان می‌دهند. در یک نمودار جعبه‌ای می‌توان بیش از یک مجموعه داده را نشان داد؛ پس این نمودار برای مقایسه مناسب است.

دامنهٔ میان‌چارکی مفید به نظر می‌رسد. این دامنه در مورد بازیکنانی که گاه‌گاهی امتیازهای بسیار اندکی کسب می‌کنند چطور عمل می‌کند؟ اگر بازیکنی در روز مسابقه، بد بازی کند، برای مریض به قیمت از دست دادن قهرمانی در تیمگان (لیگ) تمام می‌شود. آیا دامنهٔ میان‌چارکی برای ما مشخص می‌کند که کدام بازیکن واقعاً ثبات بیشتری دارد یا دامنه؟

مریٰ نباید فقط دامنه امتیازهای بازیکنان را مقایسه کند. او به راهی نیاز دارد تا به طور دقیق از روی مقادیر موجود محاسبه کند که کدام بازیکن در روز مسابقه ثبات بیشتری دارد. به عبارت دیگر، او باید بازیکنی را پیدا کند که امتیازهایش کمترین تغییرات را داشته باشد.

مشکل دامنه و دامنه میان چارکی این است که فقط تفاوت بین مقادیر کم و زیاد را به شما می‌گویند؛ اما نمی‌گویند که چند وقت به چند وقت، بازیکنان این امتیازهای کم و زیاد را در مقابل امتیازهای نزدیک به میانه کسب می‌کنند. این برای مریٰ مهم است.



کار در کلاس



برای مجموعه داده‌های زیر، نمودار جعبه‌ای بکشید.

$4/8, 2/75, 4/1, 1/25, 1/5, 2/5, 3/1, 3/2, 4/25, 4/75, 4/95, 5/1$

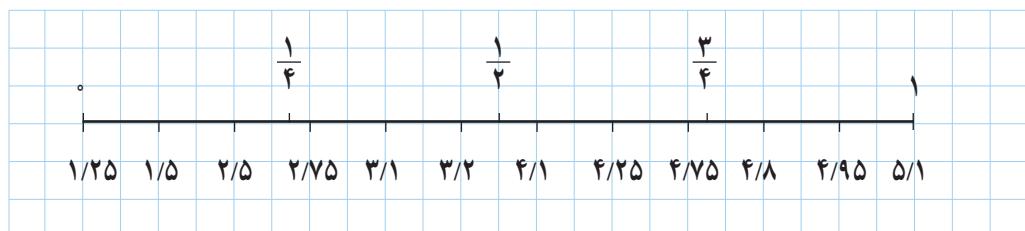
راهنمایی :

گام اول: کمترین مقدار و بیشترین مقدار را مشخص کنید.

از آنجا که اعداد به ترتیب از کوچک به بزرگ چیده شده‌اند، اولین عدد مقدار است و آخرین عدد مقدار.

گام دوم: چارک‌ها را مشخص کنید.

در این مجموعه ۱۲ عدد وجود دارد. می‌توانیم از شکل زیر یا از فرمول برای تعیین چارک‌ها استفاده کنیم.

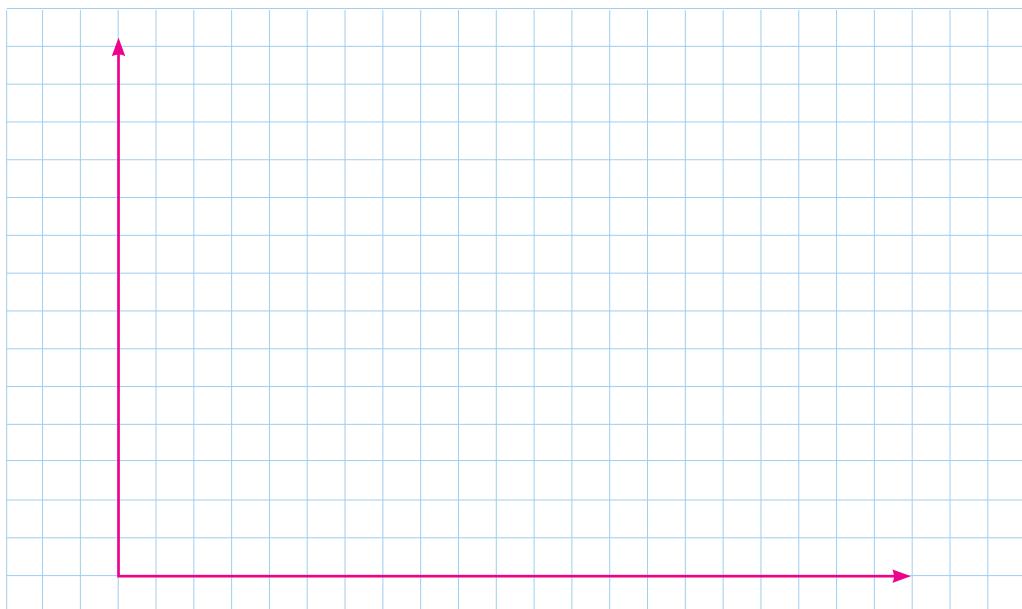


با نگاه به شکل بالا درمی‌یابیم که میانه بین مقادیر و است. بنابراین، مقدار میانه می‌شود:

چارک اول، بین مقادیر و قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار اولین چارک می‌شود:

چارک سوم بین مقادیر و قرار می‌گیرد. بنابراین، مقدار سومین چارک می‌شود:

گام سوم: نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



نمودارهای میله‌ای افقی درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی‌اند، با این فرق که محورها چرخیده‌اند. در نمودارهای میله‌ای افقی، رده‌ها روی محور عمودی و درصد یا فراوانی روی محور افقی نشان داده‌می‌شود.

نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌ترند، اما نمودارهای میله‌ای افقی در صورتی که اسم رده‌ها طولانی باشد، مفید واقع می‌شوند. نمودارهای میله‌ای افقی برای نمایش اسامی رده‌ها، بدون نیاز به عمودی نوشت، فضای زیادی را در اختیارمان می‌گذارند.

تمرین



۱. نمودارهای میله‌ای، فراوانی یا درصدها را نشان می‌دهند. چه زمانی باید از فراوانی‌ها استفاده کرد و چه زمانی از درصدها؟
۲. نمودارهای میله‌ای افقی، درست شبیه نمودارهای میله‌ای عمودی هستند؛ با این تفاوت که محورها چرخیده‌اند. نمودارهای میله‌ای عمودی مرسوم‌تر هستند. به نظر شما رسم نمودارهای میله‌ای افقی چه زمانی مفید است؟
۳. سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است :

۲۷, ۲۴, ۲۶, ۲۶, ۲۹, ۲۵, ۲۵, ۳۳, ۳۱, ۲۱, ۲۶, ۲۵

(الف) نمودار نقطه‌ای آن را رسم کنید و مقادیر میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را روی محور افقی نشان دهید.

(ب) نمودار جعبه‌ای داده‌هارا رسم کنید.

(پ) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است، بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانگین است؟

(ت) آیا تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه است بیشتر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها کمتر از میانه است؟ میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(ث) سن چه تعدادی از بازیکنان، بین چارک اول و سوم قرار دارد؟ آیا بدون محاسبه چارک‌ها می‌توانستید

به این سؤال پاسخ دهید؟

درس ۲

نمودارهای چندمتغیره

فعالیت

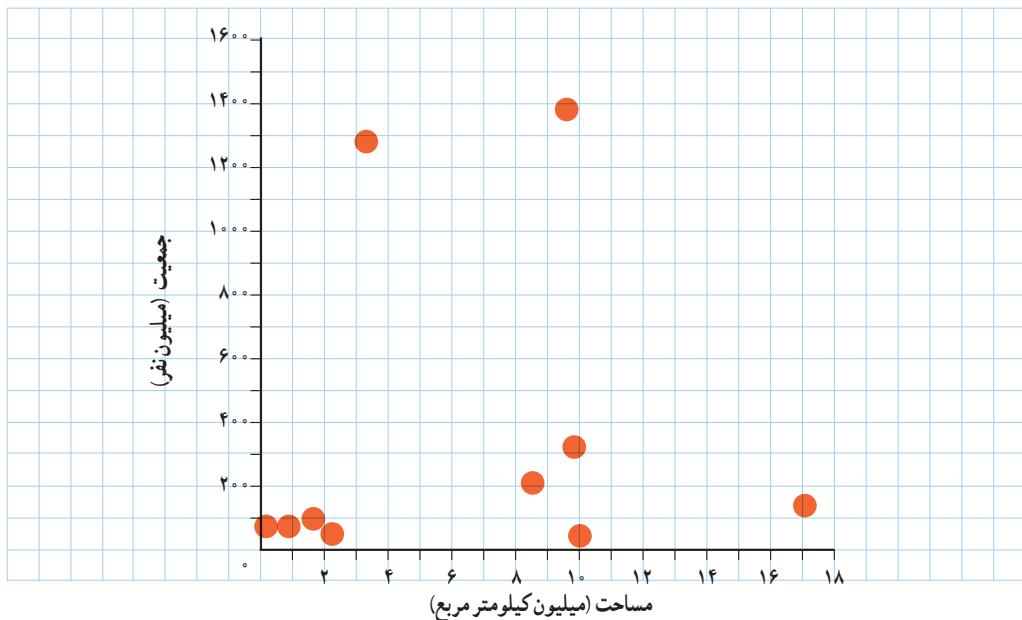


پوریا علاقه زیادی به جغرافیا دارد. او فهرستی از مقادیر سه متغیر مربوط به کشور را تهیه کرده است:

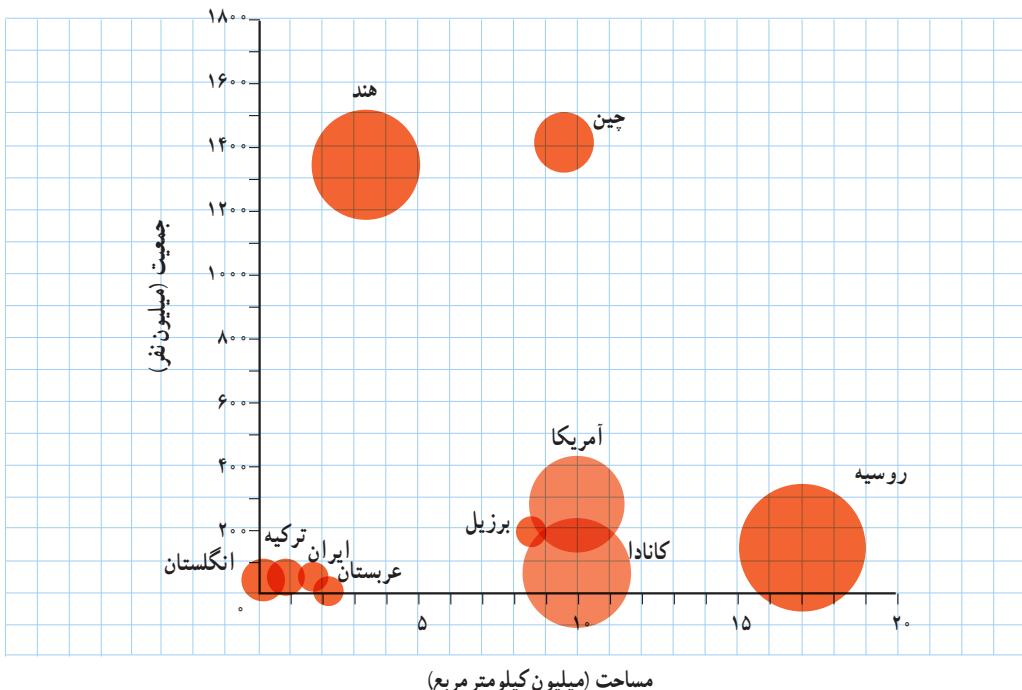
نام کشور	جمعیت (نفر)	مساحت (کیلومتر مربع)	آب‌ها (درصد)
ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۰۱۵,۷۶۷	۰/۶۵
ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳/۰۰
عربستان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰

پوریا می‌داند که برای هر کدام از متغیرهای مربوط به کشورها، یعنی مساحت و جمعیت و درصد آب‌ها، می‌تواند نموداری میله‌ای رسم کند. برای هر جفت از این متغیرها هم می‌تواند پراکشنگاشت رسم کند (مثلاً نمودار جمعیت در مقابل مساحت)؛ اما این سؤال برایش مطرح است که آیا راهی وجود دارد تا هر سه متغیر مربوط به این کشورها را بهطور همزمان فقط در یک نمودار نشان دهد؟

پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها



پوریا همین طور که به پراکنش نگاشت جمعیت در مقابل مساحت کشورها نگاه می کرد، ناگهان به این فکر افتاد که اندازه نقطه های نمودار را متناسب با درصد آب های کشورها رسم کند. پس نموداری به شکل زیر کشید:



به این ترتیب، او موفق شد سه متغیر مربوط به کشورها را در یک نمودار، نمایش دهد. نموداری که پوریا رسم کرد، به نام نمودار حبابی معروف است.



هر نقطه یا دایره در نمودار حبایی، در واقع یک سه‌تایی مرتب به صورت (V_۱, V_۲, V_۳) را مشخص می‌کند، که در آن داریم:

- V_۱ : موقعیت نقطه روی محور افقی،
- V_۲ : موقعیت نقطه روی محور عمودی،
- V_۳ : اندازه نقطه (مساحت دایره).

نمودارهای حبایی را می‌توان گونه خاصی از پراکنش نگاشت دانست که برای نمایش همزمان سه متغیر عددی به کار می‌روند و در آنها بجای نقطه از دایره‌های توپر استفاده می‌شود.

سیستم یینایی انسان به طور طبیعی اندازه یک دایره را بر اساس مساحت آن در نظر می‌گیرد. مساحت دایره هم برخلاف قطر یا محیط آن، متناسب با شاعع دایره نیست؛ بلکه متناسب با توان دوم شعاع است. پس اگر شعاع دایره‌ها را دقیقاً متناسب با مقادیر متغیر سوم در نظر بگیریم، اختلاف ظاهری اندازه دایره‌ها غیر واقعی و گمراه‌کننده خواهد بود. برای برطرف کردن این مشکل باید شعاع دایره‌ها را متناسب با جذر مقادیر متغیر سوم در نظر گرفت.

توجه: متغیر سوم در نمودارهای حبایی نباید دارای مقادیر منفی یا صفر باشد.



کار در کلاس

قد و وزن و نمره درس‌های ریاضی و ادبیات فارسی دانش‌آموزان کلاس را مشابه آنچه در فعالیت دیدید، در یک جدول یادداشت کنید.

برای هر کدام از دسته‌های سه‌تایی متغیرهای زیر، نمودار حبایی رسم کنید:

- (الف) قد، وزن، نمره ریاضی
- (ب) قد، وزن، نمره ادبیات فارسی
- (پ) قد، نمره ریاضی، نمره ادبیات فارسی

سپس در هر نمودار، جای متغیرها را چنان عوض کنید؛ که دایره‌ها هر بار، نشان‌دهنده یکی از متغیرها باشند.



تمرین

۱. مقدار متغیر سوم در نمودار حبایی، متناسب با کدام‌یک از موارد زیر است؟

- (الف) شعاع دایره‌ها
- (ب) قطر دایره‌ها
- (پ) محیط دایره‌ها

۲. نمودارهای حبایی برای نمایش چند متغیر عددی در یک نمودار به کار می‌روند؟

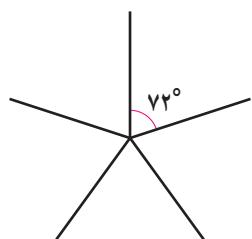
- (الف) یک متغیر
- (ب) دو متغیر
- (پ) سه متغیر

اطلاعات اضافی درباره واحدهای آماری (علاوه بر سه متغیر اصلی) را می‌توان با استفاده از رنگ‌ها و طرح‌ها وارد نمودار حبایی کرد. مثلاً در نمودار مربوط به درصد آب‌های کشورها می‌توان قاره‌های مختلف را با رنگ‌های مختلف دایره‌ها مشخص کرد. اگر علاوه بر آن بخواهیم زبان رسمی کشورها را هم در نمودار مشخص کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

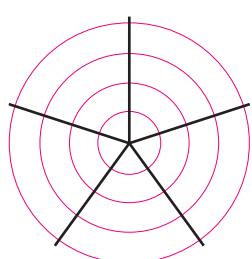
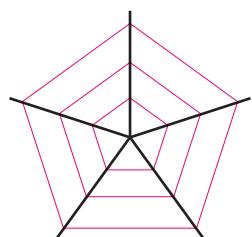
نمودار راداری :

استفاده از نمودار راداری، روشی برای نمایش داده‌های چندمتغیره در قالب نموداری دوبعدی است، که در آن سه متغیر کمی یا بیشتر بر روی محورهایی نشان داده می‌شوند که نقطه شروع همه آنها یکی است. محل قرارگیری و زاویه محورها نسبت به یکدیگر، هیچ اطلاعات خاصی را بیان نمی‌کند.

نمودار راداری از چند خط (به طور دقیق‌تر: نیم‌خط) به شکل پره‌های چرخ دوچرخه تشکیل می‌شود که در نقطه‌ای مرکزی به یکدیگر اتصال دارند و با زاویه‌های یکسان بین هم، گردآورده آن نقطه قرار گرفته‌اند. هر کدام از این خطوط، در واقع یک محور و نشان‌دهنده یک متغیر است؛ پس می‌تواند درجه‌بندی شود. به این خطوط، اصطلاحاً شعاع‌های نمودار راداری می‌گویند.



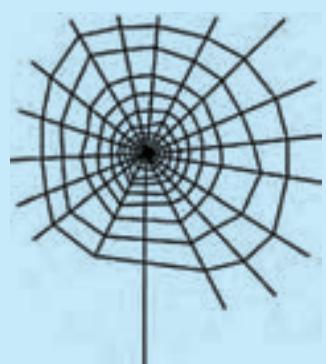
اگر درجه‌بندی شعاع‌ها به گونه‌ای انجام گیرد که فاصله بین نشانک‌های متواالی بر روی همه شعاع‌ها یکسان باشد، می‌توان خطوط راهنمای مقادیر را هم رسم کرد؛ به شرطی که باعث شلوغی نمودار نشود.

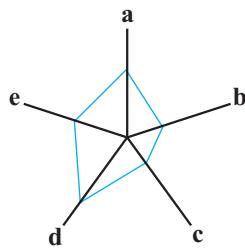


گاهی این خطوط راهنما را به جای خط راست، به صورت خط خم و دایره رسم می‌کنند. در این حالت، نمودار واقعاً شبیه صفحه نمایش رادار می‌شود.

خواندنی

از آنجا که نمودار راداری گاهی شبیه تار عنکبوت است، عده‌ای به آن «نمودار تار عنکبوتی» هم می‌گویند. اگر خطوط راهنما رسم نشوند، این نمودار ممکن است شبیه یک ستاره شود. به همین دلیل، آن را «نمودار ستاره‌ای» هم می‌نامند. البته نام‌های دیگری هم برای این نمودار وجود دارد.





نسبت مقدار یک متغیر، برای یک مشاهده به بیشینه آن متغیر بهازی همه مشاهدها، اندازه آن مقدار روی شعاع مربوط را مشخص می‌کند. این کار را برای همه متغیرها و بر روی همه شعاع‌ها انجام می‌دهیم. سپس نقاط مشخص شده روی شعاع‌های مجاور بهازی هر مشاهده را به هم وصل می‌کنیم. به این ترتیب، نمودار راداری برای یک مشاهده به دست خواهد آمد. اگر نمودار مربوط به دو یا چند مشاهده را روی هم بیندازیم، می‌توانیم مشاهده‌ها را با هم مقایسه کنیم.

نمودار راداری به ما می‌گوید:

- کدام مشاهده‌ها شبیه به یکدیگرند؟
- آیا داده دورافتاده‌ای وجود دارد؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به متغیرهای دیگر بیشتر یا کمتر است؟
- مقدار کدام متغیر برای یک مشاهده نسبت به مشاهده‌های دیگر بیشتر یا کمتر است؟

از این نمودار در ورزش برای نشان دادن میزان قدرت و ضعف بازیکنان نسبت به یکدیگر استفاده می‌شود.

یادآوری:

منظور از مشاهده یا نقطه داده‌ای در آمار، مجموعه‌ای است شامل یک یا چند مقدار اندازه‌گیری شده برای یک عضو جامعه آماری (= واحد آماری).

مثالاً اگر واحدهای آماری، داشن‌آموzan کلاس باشند و سن و قد و وزن و گروه خونی آنان را ثبت کنیم، مجموعه مقادیر این متغیرها برای هر کدام از داشن‌آموzan، یک «مشاهده» است.

توب طلای فدراسیون بین‌المللی فوتبال (فیفا)، جایزه‌ای سالانه بود که در سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۱۵ میلادی توسط فیفا و مجله فرانس‌فوتبال به بهترین بازیکن فوتبال مرد جهان داده می‌شد. انتخاب بهترین بازیکن بر اساس رأی گیری از نمایندگان رسانه‌های بین‌المللی و سرمربیان و کاپیتان‌های تیم‌های ملی فوتبال صورت می‌گرفت.

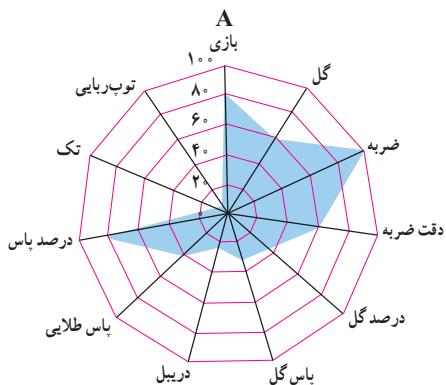
❖ مثال: نامزدهای نهایی دریافت جایزه «توب طلا» در سال ۲۰۱۳ میلادی، سه بازیکن A و B و C بودند که در نهایت، جایزه به بازیکن A تعلق گرفت.

برای اینکه بیینیم آیا این انتخاب عادلانه بوده است یا نه، داده‌های گردآوری شده از این سه بازیکن در طول فصل ۲۰۱۲-۲۰۱۳ را بررسی می‌کنیم. (همه داده‌ها، به جز تعداد بازی، به صورت میانگین مقادیر اندازه‌گیری شده در طول هر ۹۰ دقیقه محاسبه شده‌اند.)

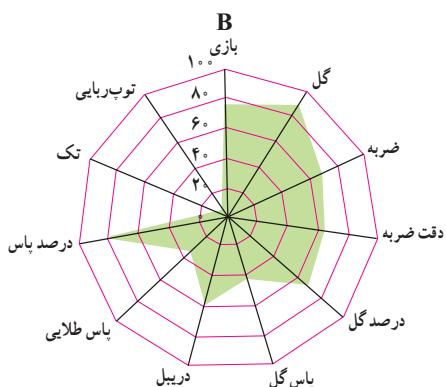
متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۲/۵	۳۸
گل زده (غیر از پنالتی)	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضریبه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضریبه (درصد)	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضریبهای گل شده (درصد)	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دربیل موفق	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طلایی (مهم)	۲/۰۵	۱/۵۸	۲/۶۶	۵
پاس‌های موفق (درصد)	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تک (تکل)	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توب‌ربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶

اکنون نمودار راداری مربوط به هر سه بازیکن را رسم می‌کنیم.

مالحظه می‌شود که تعداد ضربه‌های بازیکن A به سمت دروازه، تقریباً حد نهایی نمودار رسیده است. یعنی تعداد ضربه‌های او به سمت دروازه، بیشتر از هر بازیکن دیگری در جهان بوده است؛ اما از سوی دیگر، تعداد دریبل‌های موفق او بهویژه نسبت به دو نامزد دیگر، خیلی کم است.

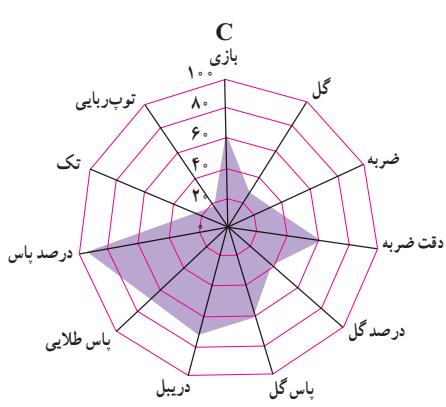


تعداد گل‌های زده بازیکن B در جریان بازی، نزدیک به حد نهایی نمودار شده و از این لحاظ، او جزو برترین‌های جهان بوده است. درصد ضربه‌هایی هم که او به سمت دروازه زده و گل شده (درصد گل)، بسیار زیاد است. به‌طور کلی، ناحیه مربوط به گل زدن در نمودار بازیکن B، وسعت زیادی دارد.

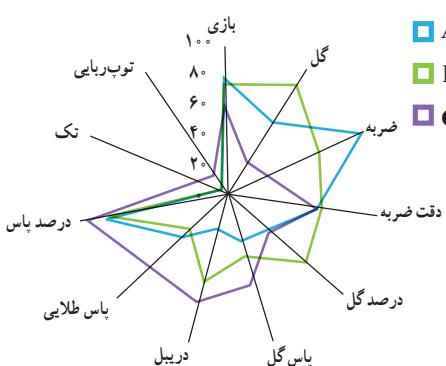


نمودار بازیکن C به‌شکل جدایی کاملاً متفاوت با نمودار دو نامزد دیگر است. علت این موضوع، نقش متفاوت او در زمین است.

نمودار بازیکنان A و B شباهت زیادی به هم داشت. آنان از بزرگ‌ترین گلزنان اند؛ اما بازیکن C یک «گل‌ساز» بزرگ است. با اینکه آمار تعداد گل‌های او برای یک هافبک کناری، بسیار خوب است و درصد ضربه‌هایی گل شده‌اش نیز عالی است، درخشش اصلی او در آمار پاس و دریبل است. بیینید که ناحیه مربوط به پاس و دریبل در نمودارش چه وسعت زیادی دارد.



اگر داده‌های مربوط به هر سه نفر را در قالب یک نمودار رسم کنیم، شاید مقایسه بین آنان آسان‌تر شود. اکنون آیا می‌توانید بگویید که کدام بازیکن، شایستگی بیشتری برای دریافت توپ طلای سال ۲۰۱۳ میلادی داشت؟

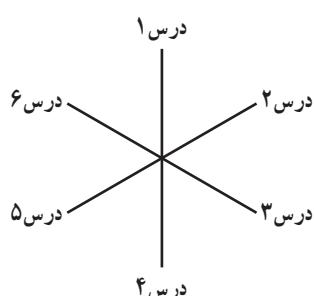


کار در کلاس



آموزگار تان شش درس را انتخاب و برای شما به صورت زیر فهرست می‌کند:

- ۱- ۲-
- ۴- ۳-
- ۶- ۵-



(الف) نمودار راداری نمره‌های خود را به صورت مقابله رسم کنید:

(ب) نمودار خود را با یکی دیگر از داشن آموزان ادغام کنید و با کمک یکدیگر، نمودار جدیدی رسم کنید.

(پ) به نظر شما نمره‌های کدام‌tan بهتر است؟

تمرین



۱. نمودار راداری برای نمایش داده‌های چند متغیر کمی به طور همزمان به کار می‌رود؟
۲. زاویه بین شعاع‌های مجاور در نمودار راداری، چه چیزی را نشان می‌دهد؟
۳. نمودار راداری چه چیزی به ما می‌گوید؟
۴. کاربرد نمودار راداری در ورزش چیست؟
۵. اگر زاویه بین دو شعاع مجاور در نمودار راداری، 40° درجه باشد، چند متغیر در نمودار حضور دارد؟
۶. داده‌های زیر را که مربوط به شاخص‌های سلامت است، در قالب یک نمودار راداری نمایش دهید:

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
عمر مورد انتظار در بدو تولد (سال)	۷۵/۵	۶۶/۴	۷۵/۸	۸۴
نسبت متخصصان سلامت (به ازای هر ۱۰ هزار نفر جمعیت)	۲۳/۰	۱۴/۰	۴۱/۱	۲۴۵
نسبت ولادت‌ها به وسیله متخصصان سلامت (درصد)	۹۶	۵۲	۹۷	۱۰۰
نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۹۰	۶۴	۹۵	۱۰۰
شاخص آمادگی اجرای مقررات بین‌المللی سلامت	۸۵	۴۳	۷۸	۱۰۰

(داده‌ها برگرفته از گزارش آماری سازمان جهانی بهداشت، سال ۲۰۱۶ میلادی)

* منابع

۱. آشفته (۱۳۹۵)، ترفندها و سواد آماری، خانه آمار اصفهان.
۲. ج. بهبودیان (۱۳۹۳)، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس.
۳. گروه مؤلفان (۱۳۹۵)، آمار و مدل‌سازی، وزارت آموزش و پرورش.
۴. C.H. Brase and C.P. Brase (2012). *Understandable Statistics*, Brooks/Cole.
۵. D. Griffiths (2009). *Head First Statistics*, O'Reilly Media.
۶. S. McKillup (2004). *Statistics Explained: An Introductory Guide for Life Scientists*, Cambridge Univ. Press.
۷. A. J. Vickers (2009). *What is a p-value anyway? 34 Stories to Help You Actually Understand Statistics*, Pearson.
۸. Written by Volunteers (2014). *Everything Maths: Grade 10 and 11 Mathematical Literacy*, Siyavula.



