فهرست مندرجات

لیست اشکال

فصل ۵

برآوردگر

۱.۵ مقدمه

در مسائل عملی توزیع هر جامعه به پارامترهای مجهولی بستگی دارد. هدف اصلی محققین مشخص کردن توزیع جامعه و پارامترهای مجهول آن می‌باشد. یکی از روش‌های مشخص کردن پارامترهای مجهول برآوردکردن [۱] پارامترهای مجهول توسط یک برآوردگر [۲] (برآوردیاب، تخمین‌گر) بر اساس نمونه (داده‌های جمع‌آوری شده از جامعه) می‌باشد. برآوردگر یک آماره است که توزیع آن به پارامتر(های) مجهول جامعه بستگی دارد. به مقدار عددی برآوردگر که از داده‌ها به‌دست آمده برآورد [۳] (تخمین) می‌گویند.

از آنجا که برای هر پارامتر برآوردگرهای بسیاری را می‌توان معرفی نمود، مسأله مهم در روش‌های آماری تشخیص بهترین برآوردگر در بین کلاسی از برآوردگرها می‌باشد. البته یافتن بهترین برآوردگر در میان تمامی برآوردگرها کار ساده‌ای نیست، ولی در بعضی مواقع امکان‌پذیر است (در درس آمارریاضی ۲ خواهید دید).

---

[۱] Estimate
[۲] Estimator
[۳] Estimation

۲.۵ پرسش‌ها

۱) برآوردگرخوب چه ویژگی‌هایی دارد.

۲) چگونه دو برآوردگر نااریب[۴] را با هم مقایسه می‌کنید.

۳) چگونه یک برآوردگر اریب و یک برآوردگر نااریب را با هم مقایسه می‌کنید.

۴) چگونه دو برآوردگر اریب را با هم مقایسه می‌کنید.

۵) در تشخیص یک برآوردگر خوب، قانون ضعیف اعداد بزرگ چه کمکی به شما می‌کند. یک مثال بیاورید.

- پاسخ سوال‌های زیر در این فصل داده خواهد شد. نگران پاسخ آنها نباشید!

٦) فرض کنید توزیع جامعه مشخص است، آیا می‌توان بدون محاسبه معیارهای ذکر شده در سوال‌های پیشین دو برآوردگر را مقایسه کرد.

۷) فرض کنید اطلاعی از توزیع جامعه در دست نیست. چگونه به سوال قبل پاسخ می‌دهید؟

- SMSE: میانگین مربع خطای نمونه[۵]
در بسیاری از موارد به‌خاطر پیچیدگی محاسبه واریانس یا میانگین مربع خطا (MSE)، برآوردگرهاقابل مقایسه نمی‌باشند. در عمل برای مقایسه برآوردگرها از شبیه‌سازی استفاده می‌کنند.

۸) فرض کنید $X_1, ..., X_n \sim U(0,\theta)$ یک نمونه تصادفی از توزیع یکنواخت باشد. برآورد گشتاوری θ چیست؟

۹) در سؤال قبل یک برآوردگر که عقل سلیم برای θ پیشنهاد می‌کند چیست؟ یعنی اگر از فاصله $(0,\theta)$، n عدد به تصادف انتخاب شوند و از شما سؤال شود با توجه به اعداد به دست آمده برآورد θ چقدر است، چه پاسخی می‌دهید؟

۱۰) به نظر شما کدام یک از دو برآوردگر معرفی شده در دو سؤال قبل بهتر می‌باشد؟

[۴] Unbiased
[۵] Sample Mean Squared Error

۱۱) با استفاده از آز گزینه How are Populations Distributed خانواده توزیع Uniform را انتخاب کرده و Simulated Data را در Lab Option علامت زده واجرا کنید. با توجه به هیستوگرام رسم شده بر اساس یک نمونه ۵۰۰ تایی از توزیع $U(۰, ۱)$ و آماره‌های نوشته شده در کنار نمودار مقدار دو برآوردگر معرفی شده در سؤال‌های ۸ و ۹ چقدر است؟ کدام یک بهتر است؟ (با توجه به اینکه داده‌ها را شبیه‌سازی کرده‌ایم علاوه بر توزیع جامعه پارامتر واقعی نیز معلوم می‌باشد، و این دلیل اصلی استفاده از شبیه‌سازی برای مقایسه برآوردگرها می‌باشد.

۱۲) ↑ آزمایش انجام شده را ۱۰ بار تکرار کرده و مقادیر دو برآوردگر را در یک جدول ثبت کنید. به نظر شما کدام یک از دو برآوردگر بهتر است؟ چرا؟

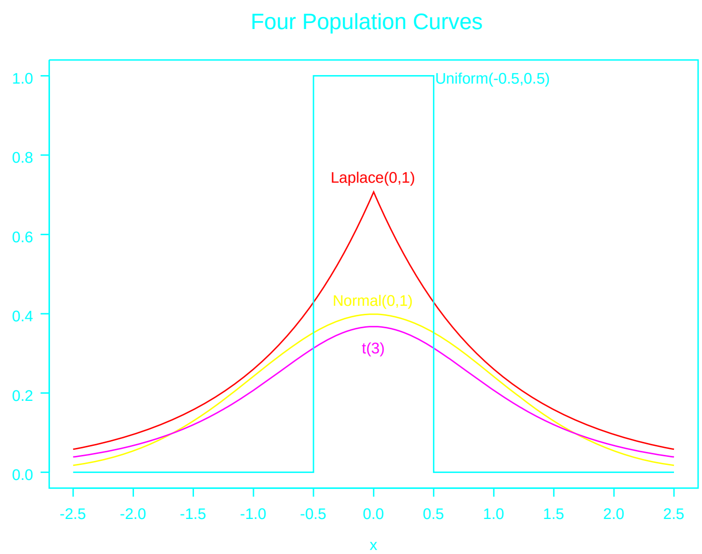
۱۳) ↑ میانگین مربع خطای نمونه را با استفاده از جدول به‌دست آمده از سؤال قبل محاسبه کنید. اگر T یک برآوردگر و t_i مقدارمحاسبه شده بر اساس نمونه iام باشد آنگاه

$$SMSE(T) = \frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m}(t_i - \theta)^۲$$

که m تعداد دفعات تکرار نمونه‌گیری (شبیه‌سازی) و θ مقدار واقعی پارامتری که می‌خواهیم آن را برآورد کنیم می‌باشد (در مسائل عملی θ مجهول است ولی در شبیه‌سازی معلوم). براساس این معیار کدام یک از برآوردگرها بهتر می‌باشد؟

۱۴) استناد به نتیجه شبیه‌سازی در یک کار تحقیقاتی زمانی امکان‌پذیر است که
الف) تعداد تکرارها (شبیه‌سازی‌ها) زیاد باشد. (در برخی از مسائل بیش از ۱۰۰۰۰ تکرار)
ب) برای مقادیرمختلف حجم نمونه شبیه‌سازی را انجام داده باشیم.
ج) برای مقادیرمختلف پارامتر شبیه‌سازی را انجام داده باشیم.
آیا مقایسه‌ای که در سؤال قبل انجام داده‌اید قابل استناد است؟ اگر قابل استناد نیست، چه‌کاری انجام داده‌ایم؟

- برآورد با کمترین واریانس



شکل ۱.۵: نمودارهای توابع چگالی توزیع‌های یکنواخت، لاپلاس، نرمال، و تی

۱۵) گزینه Minimum Variance Estimator[٦] (شکل ۱.۵) از آز را انتخاب کنید. نمودار چه توزیع‌هایی را مشاهده می‌کنید؟

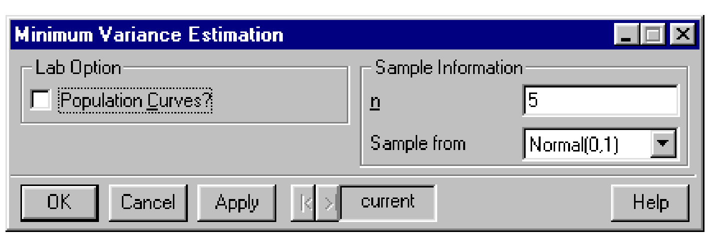
۱۶) ↑ اگر بخواهیم پارامتر مرکزی این جامعه را برآورد کنیم (در شکل رسم شده این پارامتر برابر صفراست). چه برآوردگرهایی را پیشنهاد می‌کنید؟

۱۷) ↑ می‌خواهیم از میانگین و میانه برای برآورد کردن پارامتر مرکزی توزیع‌های ذکر شده استفاده کنیم. ویژگی‌های این دو برآوردگر را ذکر کنید (برتری‌ها و محدودیت‌های آنها).

۱۸) ↑ آیا این دو برآوردگر ناااریب هستند؟ چرا؟ با توجه به شکل توزیع نظر دهید.

۱۹) ↑ به نظر شما برای کدام جامعه میانه و برای کدام جامعه میانگین برآوردگر بهتری می‌باشد. چرا؟

٦



۲۰) ↑ چگونه پاسخ خود را تحقیق می‌کنید. (با استفاده از گزینه Minimum Variance Estimator این کار را انجام دهید. یعنی با انتخاب هر توزیع و مقایسه خروجی‌های آنها) هیستوگرام‌ها و نمودارهای جعبه‌ای را تفسیر کنید.

۲۱) چرا گزینه Minimum Variance Estimator آز از انحراف معیار نمونه برآوردگرها برای مقایسه استفاده می‌کند، نه $\sqrt{SMSE}$؟

۲۲) ↑ اگر اندازه نمونه کمتر و یا بیشتر از اندازه تعیین شده در گزینه Minimum Variance Estimator آز باشد، آیا تغییری در پاسخ شما در قسمتهای قبل رخ می‌دهد؟

صف شیر محلهٔ ما خیلی طولانی بود و من حوصله ایستادن توی صف را نداشتم. بعد از ظهر که شیر می‌آمد، به سرعت توزیع شده دیگر کسی باقی نمی‌ماند، در حالی که هنوز شیر موجود بود. مراجعه کنندگان در این فاصله زمانی می‌توانستند بدون صف شیر دریافت کنند. پیش خودم گفتم اگر این زمان را تخمین بزنم مشکل حل می‌شود. پس شروع به ثبت دادها در دو هفته کردم و زمان خرید شیر را برآورد کردم. روز شنبه شیشه به دست به طرف مغازه راه افتادم از دور هیچ کس را ندیدم، پیش خودم گفتم: «به این میگن برآورد!» ولی وقتی به مغازه رسیدم (یعنی ساعت برآورد شده ۱۶:۲۰) از شیر خبری نبود. گفتم مگر شیر نیاوردید؟ گفت چرا ساعت ۱۰ صبح!

فصل ۶

برآورد فاصله‌ای

۱.۶ مقدمه

در عمل برآورد نقطه‌ای، اطلاعات کافی در اختیار شنونده یا خواننده نمی‌گذارد و حتی در بعضی موارد گمراه کننده است. برای رفع این مشکلات نوع دیگری از برآوردگرها را معرفی کرده‌اند که به آنها برآوردگر فاصله‌ای[۱] یا فاصله اطمینان[۲] می‌گویند. از برتری‌های این برآوردگرها بیان یک فاصله عددی (به جای یک عدد) به همراه یک ضریب اطمینان[۳] در کنار آن می‌باشد. هر چند که این ضریب اطمینان، بعد از مشاهده نمونه تصادفی و محاسبه فاصله اطمینان ارزش خود را از دست می‌دهد ولی نقش مهمی در محاسبه فاصله اطمینان ایفا می‌کند. در این فصل به بررسی یک فاصله اطمینان خوب می‌پردازیم. و نقش فرض‌های اولیه در صحت فاصله اطمینان را بررسی می‌کنیم.

[۱] Interval Estimator
[۲] Confidence Interval
[۳] Confidence Coefficient

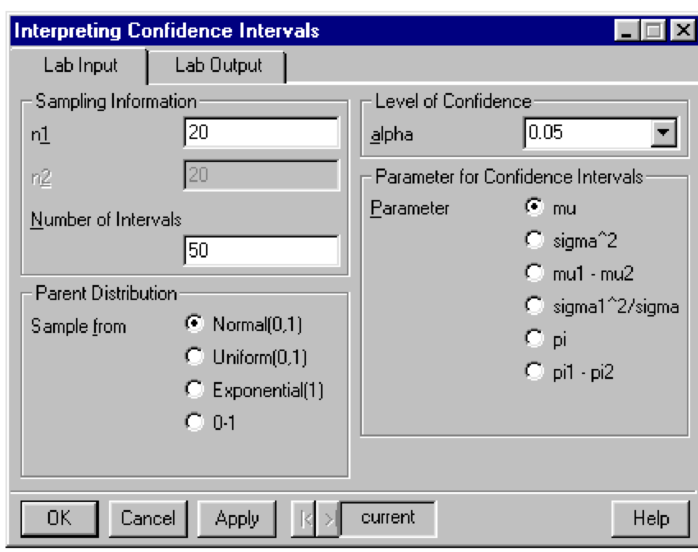
۲.۶ پرسش‌ها

۱) با استفاده از گزینه Interpreting Confidence Intervals[۴] (شکل ۱.۶) یک فاصله اطمینان (با ضریب اطمینان ۰/۹۵) برای میانگین جامعه را براساس نمونه‌های تصادفی ۲۰تایی از توزیع نرمال $N(0,1)$ با استفاده از ۵۰ تکرار تعبیر کنید. (یادآور می‌شویم که در این شبیه‌سازی نیز مانند گذشته پارامتر واقعی معلوم است.)

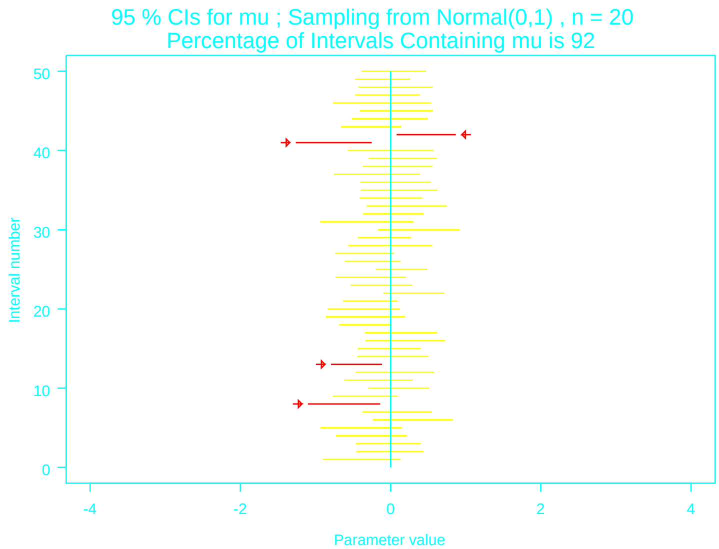
۲) ↑ اگر تعداد تکرارها را افزایش (یا کاهش) دهیم. آیا تغییری در تعبیر فاصله اطمینان رخ می‌دهد؟ در چه حالتی تعبیر فاصله اطمینان دقیق‌تر است (تعداد تکرارها بین ۲ و ۲۰۰ می‌باشد)

۳) ↑ اگر اندازه نمونه زیاد شود چه تغییری در فاصله اطمینان رخ می‌دهد؟ $(5 \le n \le 500)$

۴) ↑ اگر ضریب اطمینان $(1-\alpha)$ خیلی زیاد شود (α خیلی کم شود) چه تغییری در فاصله اطمینان رخ می‌دهد آیا منطقی است که α را بسیار کوچک مثلاً 10^{-6} در نظر بگیریم؟ چرا؟



۴



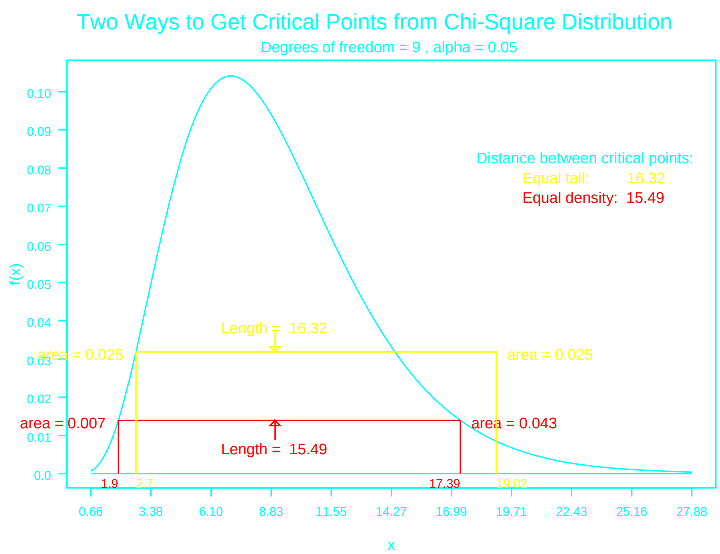
شکل ۱.٦: ۵۰ فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین جامعه

۵) ↑ اگر توزیع نمونه تصادفی نرمال نباشد، آیا تعبیر فاصله اطمینان هنوز صحیح است؟ برای توزیع‌های یکنواخت و نمایی پاسخ خود را تحقیق کنید. (روی اندازه نمونه بحث کنید.)

٦) ↑ آیا فاصله اطمینانی که برای میانگین (μ) در توزیع نرمال محاسبه می‌کنیم یک فاصله اطمینان خوب است؟ از چه معیارهایی برای خوب بودن استفاده می‌کنید؟

۷) ↑ چه تفاوتی بین فاصله اطمینان‌های محاسبه شده برای μ و $\sigma^۲$ در توزیع نرمال وجود دارد. (برای مشاهده تفاوت بین آنها با $n = ۵$ شبیه سازی کنید)

۸) آیا فاصله اطمینان برای $\sigma^۲$ واقعاً خوب است؟ چرا؟ برای اینکه بتوانید بهتر نظر دهید می‌توانید به شکلی که با استفاده از گزینه

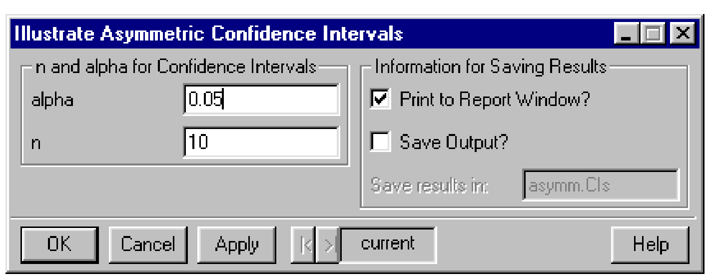


شکل ۲.۶: فاصله اطمینان متقارن و نا متقارن

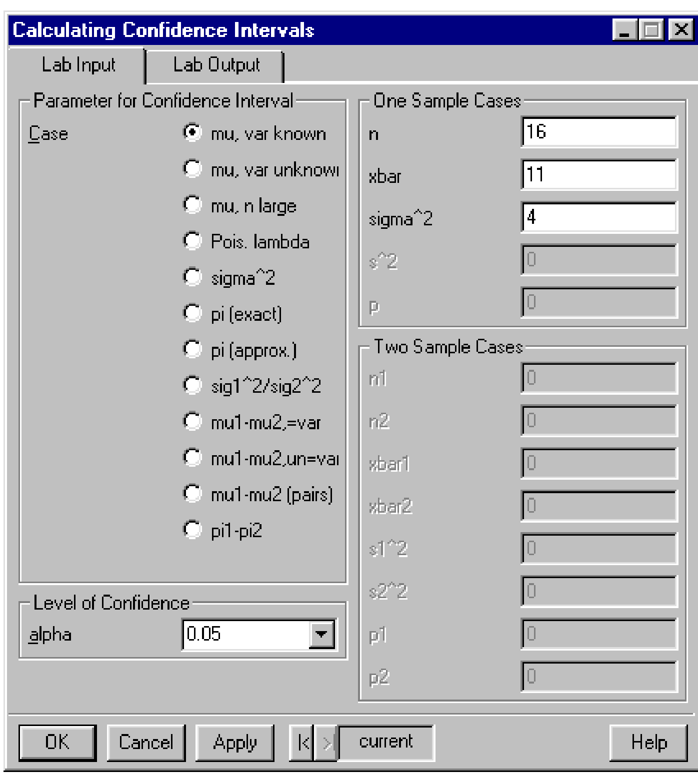
Asymmetric Confidence Intervals[5] (شکل۲.۶) رسم می‌شود نگاه کنید. در این شکل دو فاصله اطمینان $\alpha - ۱$ درصد رسم شده است. کدام یک بهتر است؟ چرا؟ تعبیر فاصله اطمینان‌ها و اندازه نمونه چه تغییراتی در این دو فاصله اطمینان می‌دهند؟

۹) در مورد فاصله اطمینان‌های دیگر نیز نظر دهید کدام یک خوب هستند و کدامیک از آنها را می‌توان بهبود بخشید؟

۵



۱۰) پاسخ تمرین‌های کتاب درسی خود را با استفاده از گزینه Calculating Confidence Intervals[6] بررسی کنید.



[6]

فصل ۷

آزمون فرض‌ها

۱.۷ مقدمه

در بسیاری از مسایل روزمره نیاز به رد (رد کردن[۱]) یا قبول (قبول کردن[۲]) یک ادعا داریم. معمولاً رد یا قبول یک ادعا را بر اساس تجربه و ذهنیت خود درباره آن موضوع انجام می‌دهیم. در واقع رد یا قبول یک ادعا در کارهای روزمره را می‌توان یک نوع تصمیم‌گیری و یا آزمون یک فرضیه[۳] (ادعا) بدون داده تلقی نمود. ولی در کارهای علمی معمولا تصمیم‌گیری بر اساس یک نمونه تصادفی انجام می‌گیرد. آزمون فرض‌ها نوعی تصمیم‌گیری آماری است. در آزمون فرض‌ها ما دو فرضیه داریم، فرض صفر ($H_\circ$) و فرض مقابل (H_1). در آزمون فرض‌ها ما بنا بر رد $H_\circ$ داریم. فرض $H_\circ$ را نفی ادعا (نظر خودمان و یا چیزی که از قبل مرسوم بوده) قرار می‌دهیم. از آنجا که رد $H_\circ$ به ناحق دارای حداقل دو ضرر برای ما می‌باشد، (این ضررها را نام ببرید) تا آنجا که امکان دارد احتمال رد $H_\circ$ به ناحق (احتمال خطای نوع اول[۴]) را کوچک می‌گیریم. (که البته بستگی به اهمیت مسأله دارد.) مثلاً اگر قرار است خوشمزگی یک نوع غذای جدید را آزمون کنیم، اگر این غذا برای سلف دانشجویان

---

[۱] Reject
[۲] Accept
[۳] Hypothesis Testing
[۴] Type I Error

باشد $\alpha = 0/1$، برای اساتید $0/05$ و برای رئیس دانشگاه $0/01$ در نظر می‌گیریم! البته خطای دیگری نیز وجود دارد و آن ضرر رد H_1 به ناحق است (خطای نوع دوم[5]). از آنجا که رد H_1 به ناحق ضرر کمتری برای ما دارد، و امکان کم کردن دو خطای ذکر شده نیز میسر نیست. معمولاً شرطی روی خطای نوع دوم نمی‌گذاریم ولی یک راه‌کار برای رد H_0 در نظر می‌گیریم که برای احتمال خطای نوع اول ثابت، احتمال خطای نوع دوم کمترین مقدارخود را داشته باشد.

همانند روش‌های ذکر شده قبلی ما واژه قبول را هیچ‌گاه به‌کار نمی‌بریم. این به دلیل یک‌طرفه بودن تصمیم‌گیری ما است. ما فرض H_0 را یا رد می‌کنیم و یا اینکه نمی‌توانیم رد کنیم. در تمامی گزارش‌های خود باید از این دو واژه استفاده کنیم.

۲.۷ پرسش‌ها

۱) می‌خواهیم فرض‌های

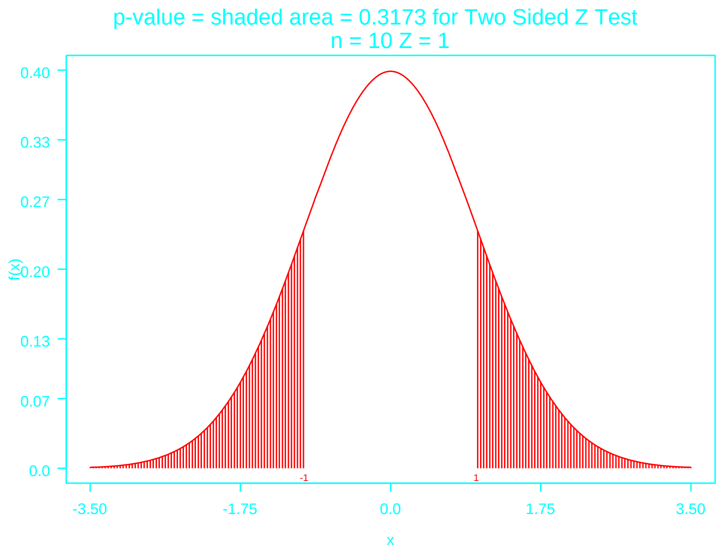
$$\begin{cases} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{cases}$$

را بر اساس یک نمونه تصادفی به اندازه ۱۰ از توزیع نرمال با واریانس معلوم در سطح[6] $\alpha = 0/05$ آزمون کنیم.

---

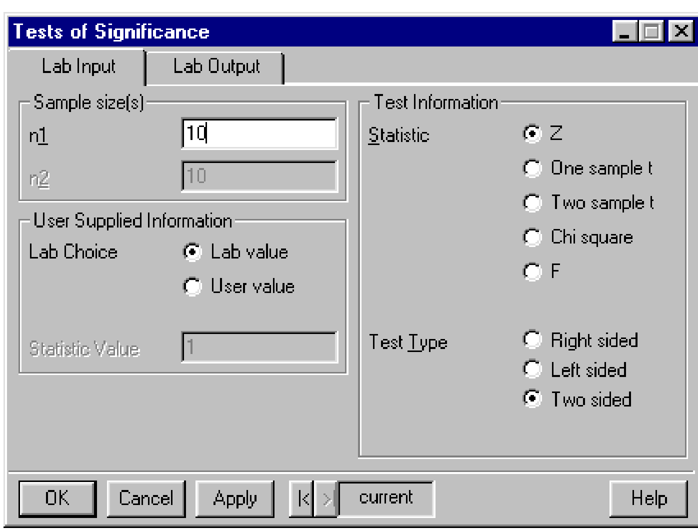
[5] Type II Error

[6] Level



شکل ۱.۷: دو روش معادل برای تصمیم گیری!

با استفاده از گزینه Test of Significance[۷] (شکل ۱.۷) این کار انجام دهید.
(داده‌ها توسط آز تولید می‌شوند.)



[۷]

۲) ↑ p−مقدار[۸] چیست؟ چگونه محاسبه می‌شود؟ چگونه بر اساس آن تصمیم‌گیری می‌شود؟

۳) ↑ آیا همواره نتیجه آزمون فرض بر اساس p−مقدار با روش معمول یکسان است؟

۴) ↑ اگر مقدار آماره آزمون برابر ۱ شود p−مقدار را برای فرض‌های زیر بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ برای این کار در گزینه Test of Significance، User Value را علامت بزنید.

$$\left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu > 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu < 0 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{l} H_0 : \mu = 0 \\ H_1 : \mu \neq 0 \end{array}\right.$$

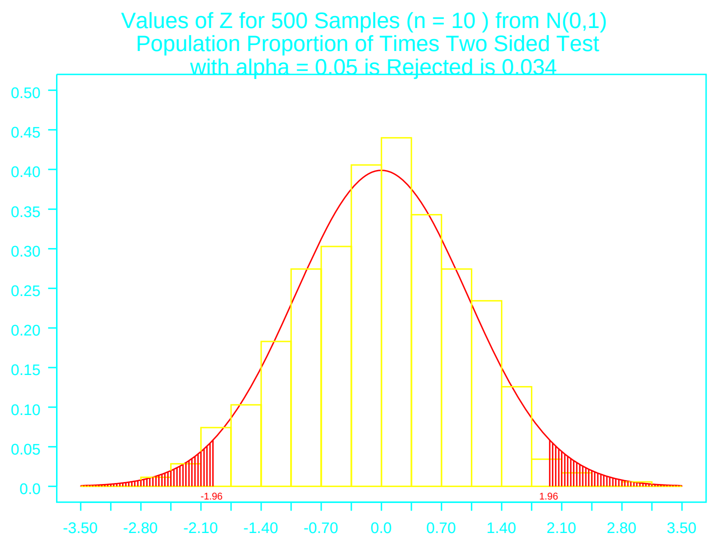
۵) ↑ اگر اندازه نمونه تغییر کند آیا تغییری در p−مقدار رخ می‌دهد؟ چرا؟

٦) ↑ اگر واریانس جامعه مجهول باشد آیا در پاسخ شما تغییری حاصل می‌شود؟ چرا؟

۷) به دو سؤال قبل برای آزمون برابری میانگین‌های دو جامعه، واریانس یک جامعه و واریانس‌های دو جامعه نرمال پاسخ دهید.

۸) همانگونه که فاصله اطمینان، با ضریب اطمینان $1 - \alpha$ را تعبیر کردیم می‌توانیم یک آزمون فرض با احتمال خطای نوع اول α را نیز تعبیر کنیم. آزمون فرض‌های مطرح شده در سؤال یک را با استفاده از گزینه

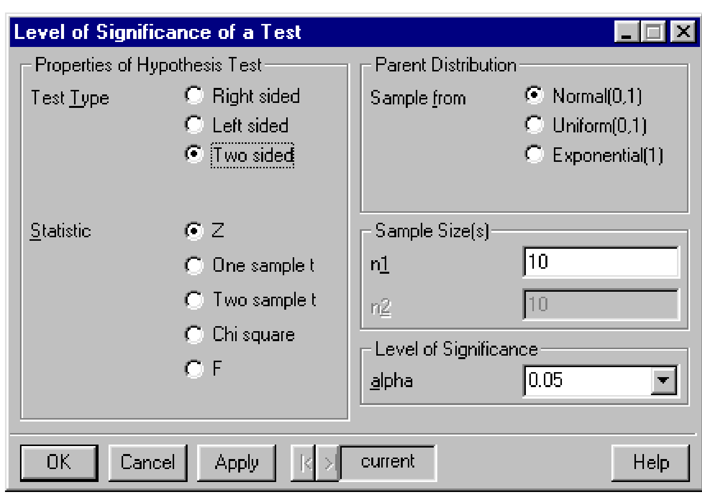
[۸] p-value



شکل ۲.۷: تعبیر آزمون فرض $H_0 : \mu = 0$ در مقابل $H_1 : \mu \neq 0$ با احتمال خطای نوع اول $\alpha = 0/05$ زمانی که داده‌ها از توزیع نرمال با میانگین ۰ تولید شده‌اند

Level of Significance of a Test[9] (شکل ۲.۷) تعبیر کنید. برای اطمینان از صحت پاسخ خود این‌کار را چند بار انجام دهید و نتایج را در یک جدول ثبت کنید.

۹) ↑ اگر توزیع جامعه نرمال باشد، در کدام یک از حالتهای زیر تغییر محسوسی در تعبیر آزمون فرض با احتمال خطای نوع اول α رخ می‌دهد.



۹

۱۰) اگرفرض H_0 به‌صورت یکی از حالتهای زیر در نظر گرفته شود آیا تغییر در تعبیر احتمال خطای نوع اول آزمون فرض حاصل می‌شود یا خیر؟

(a) $H_0 : \mu = 0$، σ^2 مجهول

(b) $H_0 : \mu_1 = \mu_2$، $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$، هر دو مجهول

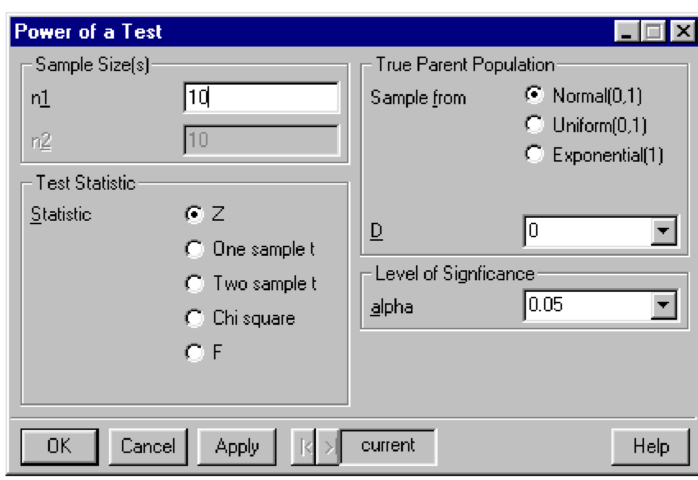
(c) $H_0 : \sigma^2 = 1$، μ، مجهول

(d) $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$، μ_1 و μ_2 مجهول

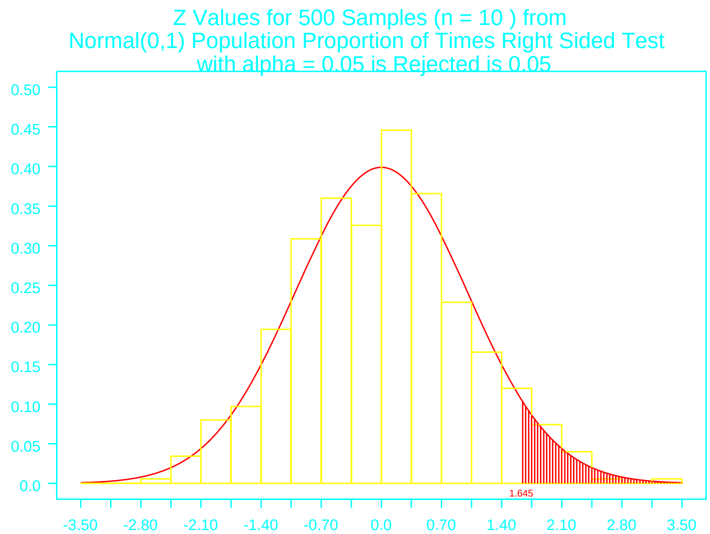
۱۱) اگر فرض نرمال بودن را با توزیع‌های دیگر نظیر یکنواخت و نمایی جایگزین کنیم آنگاه فرض H_0 را برای این دو توزیع نوشته و به سؤالات ۹ و ۱۰ پاسخ دهید.

۱۲) در پرسش‌های قبل مشاهده کردیم که تعداد دفعاتی که H_0 رد می‌شود، زمانی که H_0 صحیح است، برآورد احتمال خطای نوع اول می‌باشد. اگر به جای تولید داده‌ها تحت فرض H_0، داده‌ها را تحت فرض H_1 تولید کنیم (به ازای یک مقدارثابت پارامتر ولی در محدوده H_1) آنگاه درصد دفعات رد فرض H_0 برآورد چه احتمالی است؟ این احتمال چه نام دارد؟

۱۳) در سؤال ۱ درصد دفعاتی که H_0 را رد می‌کنید برای برخی از مقادیر $\mu > 0$، را بر اساس ۵۰۰ تکرار محاسبه کنید. برای این منظور از گزینه Power of a Test[10] (شکل ۳.۷) آز استفاده کنید. مقدار D نمایانگر درصد دوری μ از صفر است. (به عنوان مثال زمانی که D=۱۰۰ تعیین شده، داده‌ها از توزیع نرمال با میانگین ۴ تولید می‌شوند.)



[10]



شکل ۳.۷: درصد دفعات رد $H_0 : \mu = 0$ زمانی که داده‌ها از توزیع نرمال با میانگین ۴ تولید شده‌اند

۱۴) ↑ درصد محاسبه شده برآورد احتمال رد H_0 به حق و یا .... می‌باشد

۱۵) ↑ در سؤال قبل شما چه چیزی را تعبیر کرده‌اید؟

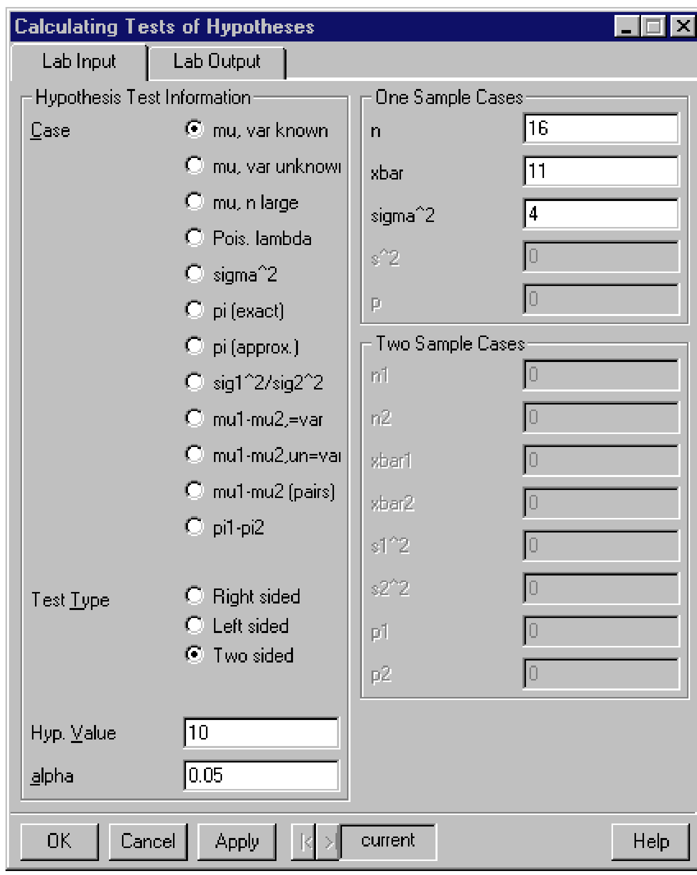
۱۶) ↑ سؤال‌های ۹ (قسمت‌های a,b)، ۱۰،۱۱ را برای این تعبیر تکرار کنید

۱۷) احتمال خطای نوع اول، احتمال نوع دوم، توان و تابع توان را بر اساس گزینه Power of a Test تعبیر کنید.

۱۸) ↑ چه نتیجه‌ای گرفته‌اید. جمع‌بندی کنید.

۱۹) تمرین‌های کتاب درسی خود را با استفاده از گزینه Calculating Tests of Hypothsese[۱۱] حل کنید. در صورت نیاز می‌توانید از صفحه Command، S-PLUS برای محاسبه میانگین و واریانس داده‌ها استفاده کنید. (از معلم خود کمک بگیرید.)

همانند روش‌های ذکر شده قبلی ما واژه قبول را هیچ‌گاه به‌کار نمی‌بریم. این به دلیل یک‌طرفه بودن تصمیم‌گیری ما است. ما فرض H_0 را یا رد می‌کنیم و یا اینکه نمی‌توانیم رد کنیم. در تمامی گزارش‌های خود باید از این دو واژه استفاده کنیم. مثلاً اگر دانشجویی نمره بالای ۱۰ گرفت نمی‌گوییم قبول‌شده، بلکه می‌گوییم نتوانستیم او را رد کنیم.



۱۱

فصل ۸

آنالیز واریانس

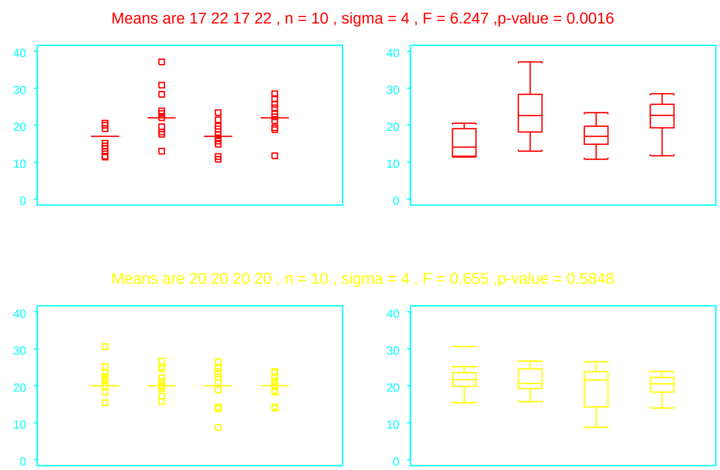
۱.۸ مقدمه

اگر می‌خواستیم فرض برابری میانگین‌های دو جامعه نرمال مستقل از هم با واریانس‌های برابر را بر اساس دو نمونه تصادفی از این جوامع، باهم مقایسه کنیم از آزمون «تی» استفاده می‌کردیم. حال اگر بخواهیم فرض برابری میانگین‌های k جامعه نرمال مستقل از هم با واریانس‌های برابر را بر اساس k نمونه تصادفی از این جوامع، باهم مقایسه کنیم، یعنی

$$\begin{cases} H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k \\ H_1 : \ H_0 \ \boxed{\text{غیر از}} \end{cases},$$

که μ_i میانگین جامعه i می‌باشد، از روشی به‌نام آنالیز واریانس یک طرفه[1] با k سطح[2] استفاده می‌کنیم.

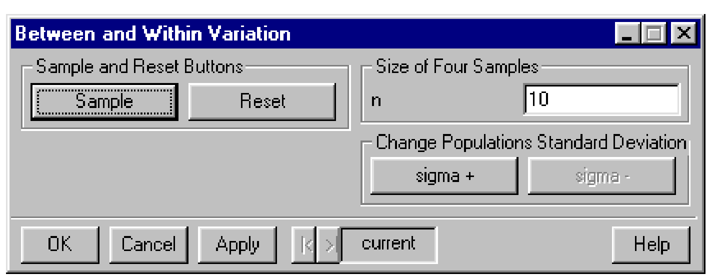
[1] One-Way Analysis of Variance (One-Way ANOVA)
[2] Level



شکل ۱.۸: تغییرات درون و بین جامعه‌ها

۲.۸ پرسش‌ها

۱) از آزگزینه Between and Within Variation[۳] را اجرا کنید (شکل ۱.۸). این گزینه در دو حالت مختلف از ۴ جامعه نرمال با واریانس‌های برابر، داده‌های تصادفی تولید کرده، داده‌ها و نمودار جعبه‌ای آنها را رسم می‌کند (حالت اول: بالای صفحه، حالت دوم: پایین صفحه). آیا با توجه به نمودار داده‌ها می‌توان در مورد برابری میانگین‌های جوامع متناظر با آنها نظر داد؟ با استفاده نمودارهای جعبه‌ای چطور؟ در صورت مثبت بودن پاسخ چگونه؟ در صورت

۳


منفی بودن پاسخ چرا؟

۲) ↑ خطوط افقی در نمودار داده‌ها نشان دهنده چیست؟ آیا برای هر نمونه‌ای می‌توان چنین خطوطی رسم کرد؟ چرا؟

۳) ↑↑ باتغییر واریانس جامعه (با استفاده از +Sigma) به دو سوال قبل پاسخ دهید.

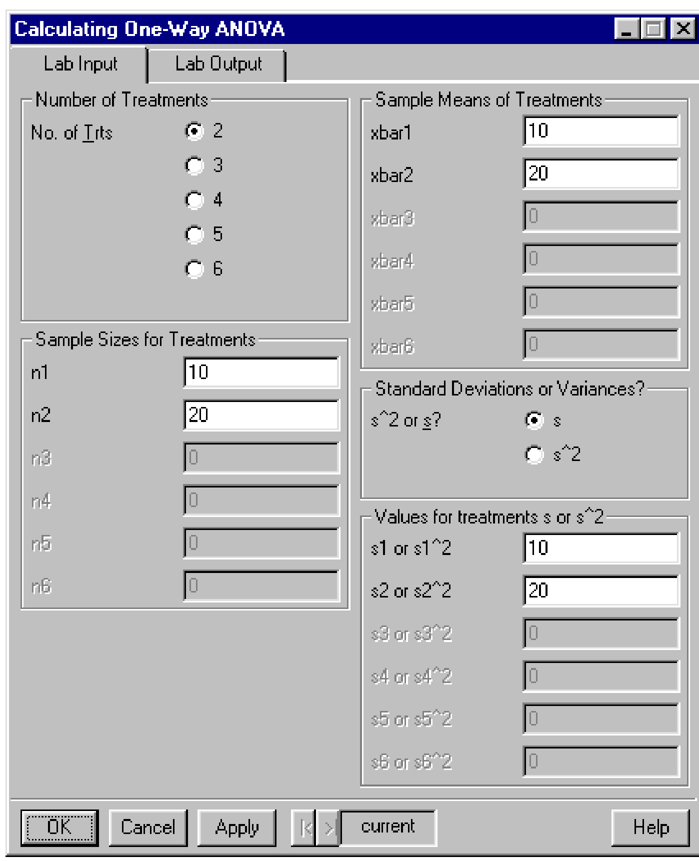
۴) ↑ با توجه به مقادیر داده شده در شکل، آیا روش بهتری برای آزمون فرض برای میانگین‌ها وجود دارد؟

۵) ↑ تاثیر حجم نمونه و واریانس را بر نتیجه تصمیم‌گیری‌ها بیان کنید.

٦) ↑ تفاوت واریانس بین جوامع و درون جوامع چیست؟ کدامیک در تشخیص تفاوت بین جوامع موثر می‌باشند.

۷) تمرین‌های کتاب درسی خود را با استفاده از گزینه
Calculating One Way ANOVA[۴]

حل کنید. در صورت نیاز می‌توانید از صفحه Command، S-PLUS برای محاسبه میانگین و واریانس داده‌ها استفاده کنید. (از معلم خود کمک بگیرید.)



۴

فصل ۹

رگرسیون

۱.۹ مقدمه

اگر به شما بگویند قد شخصی ۲ متر است چه تصوری از وزن او در ذهن خود تداعی می‌کنید؟ بسیاری از متغیرها این چنین هستند یعنی با داشتن اطلاعات در خصوص یکی از متغیرها می‌توان اطلاعاتی در خصوص دیگری به دست آورد، ولی همواره این مقدار دقیق نیست. این عدم دقت به دلیل عدم شناخت کافی از رابطه بین این دو متغیر ناشی می‌شود. البته در برخی از موارد این رابطه‌ها روابط ریاضی هستند. مثلاً اگر X تعداد شیرها و Y تعداد خطها در پرتاب یک سکه تعریف کنیم، رابطه بین X و X کاملاً مشخص است ($Y = X - ۱$). در حالی که در مثال قبل رابطه شناخته شده‌ای نداشتیم. از آنجا که روابط متغیرها در بسیاری از موارد خطی و با یک خط قابل تقریب است معیاری برای اندازه‌گیری میزان وابستگی خطی متغیرهای تصادفی تعریف کرده‌اند که ضریب همبستگی خطی[۱] (به اختصار، ضریب همبستگی) نام دارد که با ρ (rho) نمایش داده می‌شود اگر مقدار $|\rho|$ زیاد باشد می‌توانیم با استفاده از رابطه خطی بین دو متغیر با داشتن یکی، مقدار دیگری را درون یابی[۲] کنیم. (برخی از نویسندگان از واژه پیش‌بینی استفاده می‌کنند، که منظور آنها درون یابی است.) رگرسیون[۳] روشی است که با آن می‌توان این کار را انجام داد.

[۱] Linear Correlation Coefficient
[۲] Interpolation
[۳] Regrassion

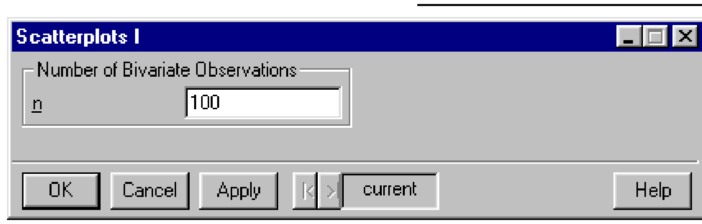
شکل ۱.۹: تاثیر ضریب همبستگی بین داده‌ها بر نمودار پراکنش آنها

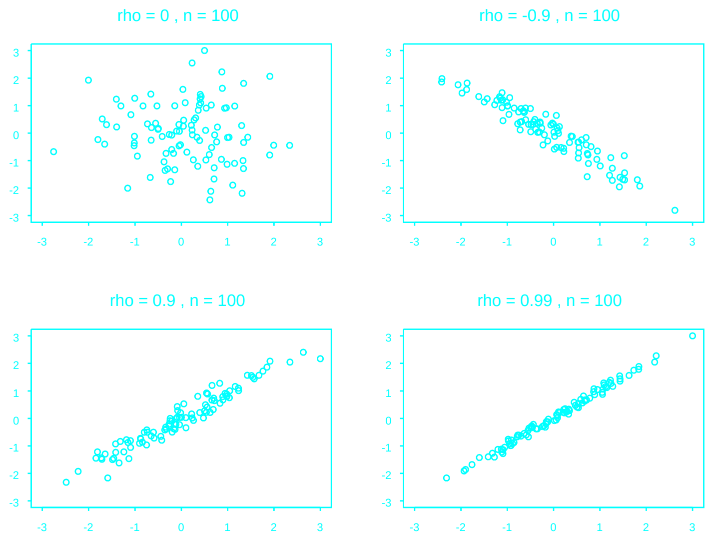
۲.۹ پرسش‌ها

۱) از گزینه Bivariate Descriptive Statistics آز، قسمت Scatterplots I[۴] (شکل ۱.۹) را انتخاب کرده و اجرا کنید. با توجه به نمودارهای پراکنش رسم شده تأثیر ضریب همبستگی را بر روی نمودارهای رسم شده بیان کنید. آیا بدون توجه به مقدار ρ می‌توانید از روی نمودار مقدار ρ را تقریباً بیان کنید؟

۲) ↑ اگر اندازه نمونه را تغییر دهید، تشخیص مقدار ρ از روی نمودار چه تغییری می‌کند. در کدام حالت تشخیص مقدار ρ ساده‌تر است؟

---

[۴]




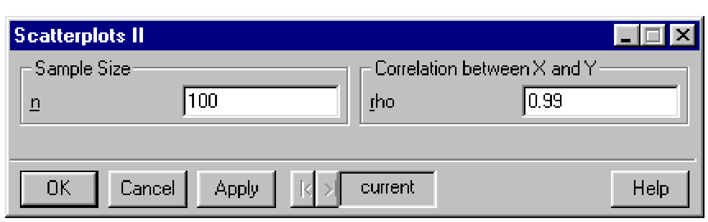
شکل ۲.۹: تاثیر اندازه نمونه و ضریب همبستگی بر نمودار پراکنش داده‌ها

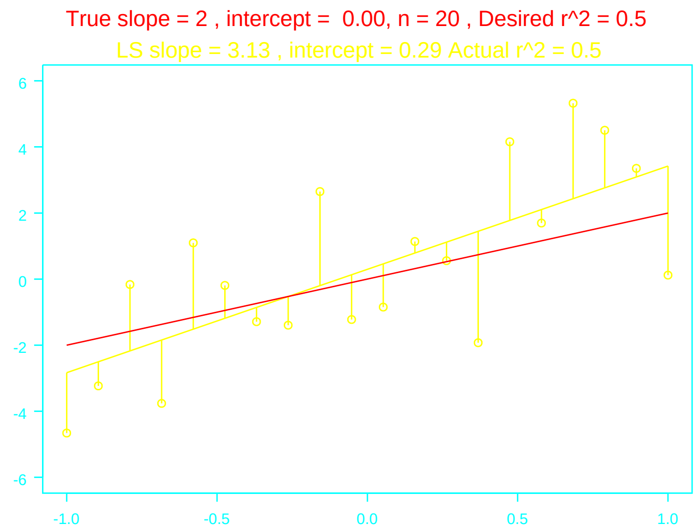
۳) از گزینه Bivariate Descriptive Statistics آن، قسمت Scatterplots II[۵] (شکل ۲.۹) را انتخاب کنید. اگر $rho = -۱$ یا $rho = ۱$ باشد نمودارداده‌ها چگونه خواهد شد؟ چرا؟
(با استفاده از این می‌توانید داده‌ها را با ضریب همبستگی دلخواه شبیه‌سازی کنید)

۴) ↑ ضریب همبستگی خطی بین دو متغیر تصادفی را چگونه برآورد می‌کنید؟ این معیار برای اولین بار توسط چه شخصی معرفی شده است؟ تشخیص مقدار ضریب همبستگی توسط این برآورد بهتراست یا از روی شکل؟

۵) چگونه یک خط به داده‌های زوج شده برازش می‌دهید؟ یک خط خوب دارای چه ویژگی‌هایی باید باشد؟

۵





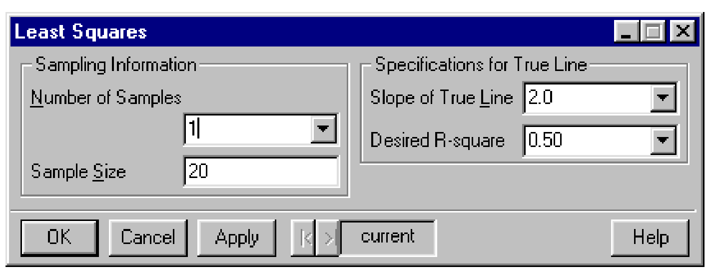
شکل ۳.۹: خط رگرسیونی و خطاها

٦) ↑ با استفاده از گزینه Bivariate Descriptive Statistics آز، قسمت Least Squares[٦] (شکل ۳.۹) را اجرا کنید. به شکل رسم شده نگاه کنید. آیا خوب بودن خط برازش شده را قبول دارید؟

۷) ↑ اگر در جعبه گفتگو مقدار Desired R-Squares ($R^۲$ برای داده‌های دو بعدی برابر ضریب همبستگی بین متغیرها به توان ۲ می‌باشد) را افزایش دهید آیا خط بهتری می‌توانیم به داده‌ها برازش دهیم؟

۸) ↑ اگر در جعبه گفتگو مقدار Number of Samples را افزایش دهیم می‌توانیم چندین خط برازش شده (که هر کدام بر اساس یک سری داده شبیه‌سازی شده با مشخصات ذکر شده در جعبه گفتگو محاسبه و رسم شده است) به صورت هم زمان رسم می‌کند. آیا در این حالت نیز با افزایش $R^۲$ گفته قبلی خود را تایید

٦



می‌کنید؟

۹) ↑ اگر شیب خط رسم شده را تغییر دهید (شیب خط بین [۳,۳−] می‌باشد) آیا تغییر در $R^۲$ باز هم شما را به نتیجه قبلی می‌رساند؟

۱۰) ↑ اندازه نمونه چه تأثیری بر بهبود خط می‌گذارد؟

۱۱) ⇈ یک نتیجه کلی در خصوص تأثیر اندازه نمونه، میزان همبستگی داده‌ها و ضریب زاویه خط بر خط برازش شده بیان کنید.

قرار شد برای جلسه بعد هر دانشجو با تعدادی داده واقعی یک رگرسیون خطی ساده انجام دهد. جلسه بعد یکی از دانشجویان با چند برگ بزرگ آمد و گفت:«آقای دکتر این هم پیش بینی ۱۰۰ سال آینده میزان بارندگی در شیراز!» استاد با تعجب سوال کرد با چند داده؟ گفت: «با داده‌های چهار فصل گذشته».