

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيْمِ

ریاضی و آمار (۳)

رشته‌های ادبیات و علوم انسانی – علوم و معارف اسلامی

پایه دوازدهم

دوره دوم متوسطه



وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

ریاضی و آمار(۳) - پایه دوازدهم دوره دوم متوسطه - ۱۱۲۲۱۲
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
سید محمد رضا احمدی، حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو دادوی،
زهرا حبیبی، محمد داشم رستمی، ابراهیم رحیانی، محمد رضا سید صالحی، میر شهرام صدر، اکرم قابل رحمت،
طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، آزاده حسین فرزان، میر شهرام صدر، حسین میرزایی و با
همکاری آزاده قاهری و عادل محمدپور در بخش آمار (اعضای گروه تألیف) - افسانه حجتی طباطبایی (ویراستار)

نام کتاب:
پدیدآورنده:
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف:
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:

اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - جواد صفری (مدیر هنری) - سمیه قنبری (صفحه آرا) - سید محمدی
حسینی (عکاس) - الهام محبوب، فاطمه رئیسان فیروزآباد (رسام) - سوروش سعادتمندی، رعنا فرج زاده درویی،
شاداب ارشادی، سپیده ملک‌ایزدی و راحله زادفتح‌اله (امور آماده‌سازی)
تهران: خیابان ابرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پژوهش (شیبد موسوی)
تلفن: ۰۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹، ۰۸۸۳۰۹۶۶، دورنگار: ۰۹۶۱-۹۸۸۳۱۱۶۱-۹
ویگان: www.irtextbook.ir و www.chap.sch.ir

مدیریت آماده‌سازی هنری:
شناسه افزوده آماده‌سازی:
نشانی سازمان:

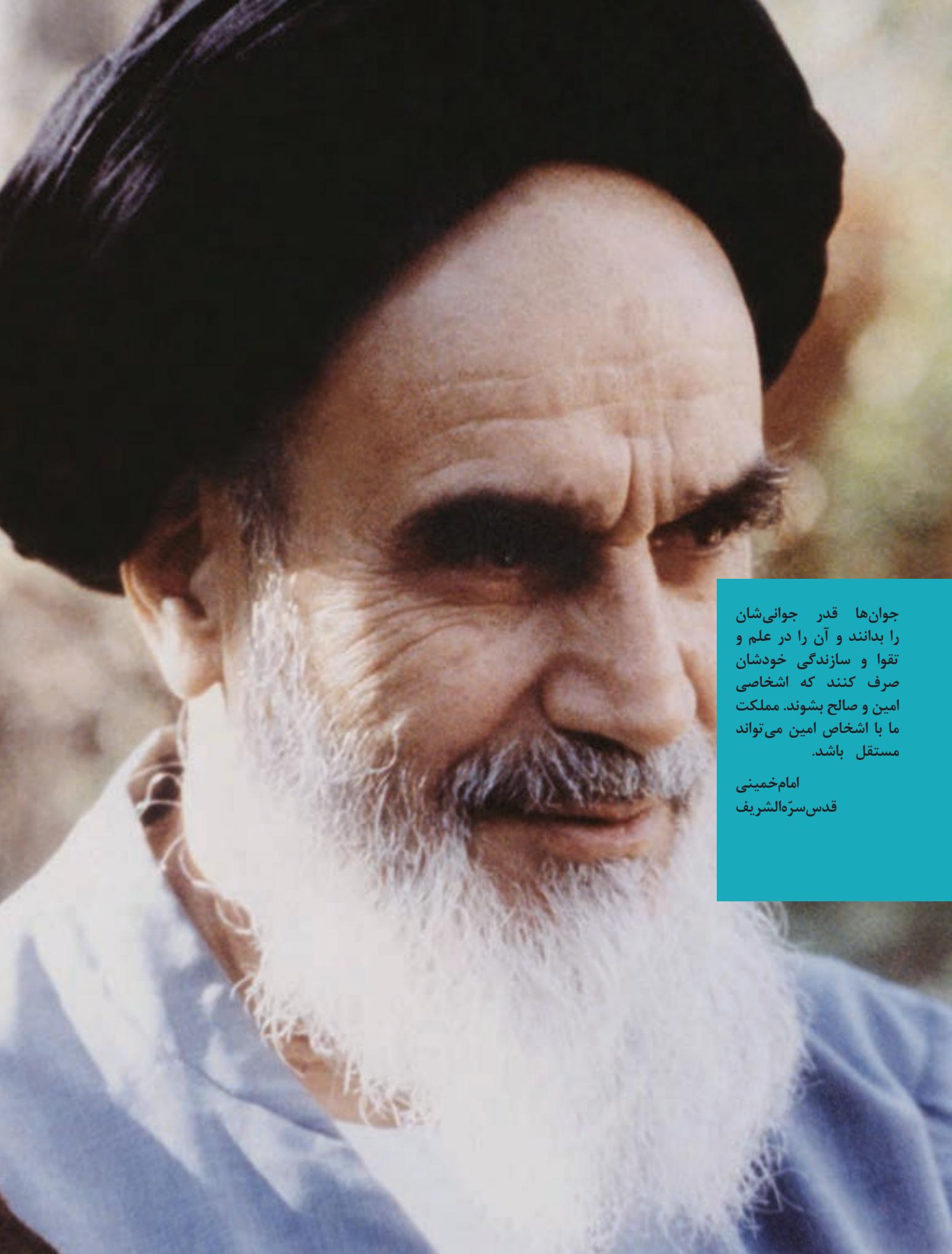
شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارو پخش)
تلفن: ۰۴۴۹۸۵۱۶۱-۵، ۰۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵-۱۳۹

ناشر:
چاپخانه:
سال انتشار و نوبت چاپ:

چاپ اول ۱۳۹۷

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵۰۹۷-۹

ISBN: 978_964_05_3097_9



جوان‌ها قدر جوانی‌شان را بدانند و آن را در علم و تقوا و سازندگی خودشان صرف کنند که اشخاصی امین و صالح بشوند. مملکت ما با اشخاص امین می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
قدس سرّه الشّریف

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است. هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکسبرداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

فهرست

| | |
|---------------------------------|-----|
| فصل ۱ – آمار و احتمال | ۱ |
| درس ۱ : شمارش | ۲ |
| درس ۲ : احتمال | ۱۲ |
| درس ۳ : چرخه آمار در حل مسائل | ۲۸ |
| فصل ۲ – الگوهای خطی | ۴۵ |
| درس ۱ : مدل سازی و دنباله | ۴۶ |
| درس ۲ : دنباله های حسابی | ۶۱ |
| فصل ۳ – الگوهای غیرخطی | ۷۳ |
| درس ۱ : دنباله هندسی | ۷۴ |
| درس ۲ : ریشه n ام و توان گویا | ۸۷ |
| درس ۳ : تابع نمایی | ۹۶ |
| منابع | ۱۰۶ |

مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییر کتاب‌های ریاضی دوره دوم متوسطه تألیف شده است. یکی از تفاوت‌های مهم این کتاب با کتاب قبلی مربوط به دوره پیش‌دانشگاهی، کاهش قابل ملاحظه محتوا است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرين قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائه مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به عهده دارد. با توجه به اینکه کتاب برای دانش آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به وسیله معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد درباره یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که رعایت این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی برای همه طراحان الزامی است. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوا آن خواهد شد. شایسته است همکاران ارجمند بر رعایت این موضوع نظارت دقیق داشته باشند. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احياناً پیش از این، سال‌ها به صورت سنتی ارائه شده‌اند و یا توسط برخی از کتاب‌های غیراستاندارد توصیه می‌شوند. طرح این گونه سؤالات که اهداف آموزشی کتاب را دنبال نمی‌کنند در کلاس درس و نیز در ارزشیابی‌ها، به هیچ عنوان توصیه نمی‌شود.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالادستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفاده افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصل حضور دانش آموز در کلاس درس را باید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش آموزان دارد.

مؤلفان از کلیه امکانات موجود نظیر سامانه اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار (ایمیل)، دعوت از دبیران مجرب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. در راستای مشارکت دبیران محترم ریاضی، پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب توسط این عزیزان از استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال شده است، که لازم است از زحمات آنها تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار^۱ و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی^۲ دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

فصل ۱ - آمار و احتمال

شمارش

درس ۱

احتمال

درس ۲

چرخه آمار در حل مسائل

درس ۳

«... وَ أَحاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا» (آلية ۲۸ / سورة مباركة جن)

«... وَ أَوْ (خداوند) بِهِ آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چيز را شمارش کرده است»



درس اول

شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانه مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت درباره روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر داشن آموزی فرستت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی (یا) یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $= ۵۵ \dots + \dots$ راه انتخاب دارد.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(n+m)$ طریق می‌توان عمل اول **یا** عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است).

مثال : شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک رواننویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه رواننویس با رنگ های متمایز انتخاب کنید؟

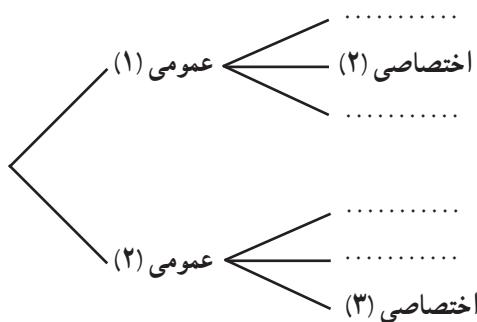
حل : در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم :

$$5+4+3=12 = \text{تعداد انتخاب‌ها}$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید :



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان‌پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به = × طریق امکان‌پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل از $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است).

مثال : مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری درباره توسعه شرکت، ۱۵ نفر از سهامداران و هیئت امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید درباره نتایج مساعد احتمالی اعضای گروه B درباره نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

- (الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط از یکی از این ۱۵ نفر مشورت بگیرد؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجه تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

راه حل :

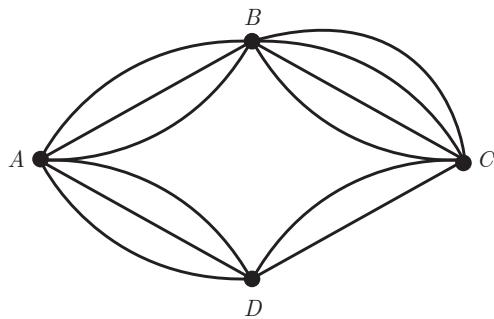
(الف) از اصل جمع استفاده می‌کیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A (یا) یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

(ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند (و) به ازای هر انتخاب از A ، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل رویه‌رو، میان چهار شهر A, B, C, D راه‌های وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان :

(الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؛ از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $\dots \times \dots = \dots$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



(ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟ برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ (یا) $\dots \rightarrow \dots \rightarrow A$ را انتخاب کرد (اصل...)؛ بنابراین : تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$$= 3 \times 4 + 3 \times \dots = \dots$$

(پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow D$ (یا) $\dots \rightarrow \dots \rightarrow B$ را انتخاب کرد؛ پس داریم : تعداد راه‌های مسافرت از B به D

نماد فاکتوریل

همان‌طور که برای ضرب یک عدد، مانند a ، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a \times a = a^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل «!» استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 6!$

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $1!=1$ و $0!=1$ تعریف می‌کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{\underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}} = 5 \times 4 = 20 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720 \quad (\text{پ})$$

$$\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{6 \times 120 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{7} \quad (\text{ت})$$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c و d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم.»

فعالیت

۱- اگر افراد A ، B و C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\begin{array}{c} 3 \\ \hline C & A \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \hline \text{یکی از ۲ نفر باقی‌مانده} \\ \hline 1 \text{ نفر باقی‌مانده} \end{array} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

↓
(اول شخص C ، بعد B و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & \rightarrow & 5! \\ \hline & & & & & & \end{array} \rightarrow \text{تعداد اعداد ۵ رقمی} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۳- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تابی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیا یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 = n!$

$$\frac{n}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{n-1}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{n-2}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{1}{\underline{\hspace{1cm}}}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تابی از آن n شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض اند؛ با این ارقام :

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

$$\xrightarrow{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \frac{5}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{5}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \frac{3}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5 \times 5! = 600.$$

یا ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است). بنابراین :

$$\xrightarrow{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \frac{4}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{4}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots \xrightarrow{4 \times 4 \times \dots \times 2 \times \dots} 4 \times 4 \times \dots \times 2 \times \dots = 288$$

یا ۱ یا ۳ یا ۵

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\text{روش اول: } \text{تعداد ۵ رقمی‌های فرد} - \text{تعداد کل ۵ رقمی‌ها} = \text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج}$$

$$= 600 - \dots = \dots$$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر

حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

$$\xrightarrow{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \frac{5}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \frac{1}{\underline{\hspace{1cm}}} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5! = \dots$$

صفرا

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

$$\xrightarrow{\text{تعداد انتخاب‌ها}} \frac{4}{\underline{\hspace{1cm}}}, \dots, \dots, \frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}}, \frac{2}{\underline{\hspace{1cm}}} \xrightarrow{4 \times \dots \times \dots \times 2 \times 2} 4 \times \dots \times \dots \times 2 \times 2 = 192$$

یا ۲ یا ۴

$$\text{تعداد ۵ رقمی‌های زوج} = 120 + 192 = 312$$

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

5 رقمی‌هایی که به 5 ختم می‌شوند + 5 رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند = تعداد 5 رقمی‌های مضرب 5

$$\begin{array}{ccccccc} & \dots & & 4 & \dots & \dots & 1 \\ \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & \dots & & \dots & & \dots & \xrightarrow{\text{صفر}} \dots \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & 4 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & \dots & & & & \dots & \xrightarrow{5} \dots \times \dots \times \dots \times 1 = \dots \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

تعداد 5 رقمی‌های مضرب 5 = 216

تبديل (انتخاب n شیء از بین n شیء، که در آن جایه‌جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد.)

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد 4 رقمی را که با ارقام 1 تا 7 می‌توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم : (تکرار ارقام مجاز نیست).

$$\begin{array}{ccccccc} & 7 & \dots & 6 & \dots & 5 & \dots & 4 \\ \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

(توجه دارید که با جایه‌جایی هر رقم از این عدد 4 رقمی با رقم دیگر، یک عدد 4 رقمی جدید حاصل می‌شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت‌ها، جایه‌جایی ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین 5 کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & \dots & \dots & \dots & \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & \dots \\ \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & \dots & & & & \dots & \xrightarrow{5 \times \dots \times \dots} \dots \end{array} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها}$$

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \dots$$



۳. در حالت کلی، نشان دهد تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\text{برابر است با : } \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \text{تعداد انتخاب‌ها} \\ \xrightarrow{\text{طبق اصل ضرب}} \frac{n \quad n-1 \quad \dots \quad (n-r+2) \quad (n-r+1)}{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+2)(\dots\dots\dots)} \\ = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \times (\dots\dots\dots)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{array}$$

تبديل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء
تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جایه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم :

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : با ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

حل : در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جایه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 210$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & & & & \\ & 7 & & 6 & & 5 & & & \\ & \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} & & & & & & & \\ & 7 \times 6 \times 5 = 210 & & & & & & & \end{array}$$

ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جایه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱ و ۲ و ۴ و ۶ سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جایه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، $3!$ جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را برابر تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی} = \frac{P(4, 3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

| انتخاب سه رقم | ۱,۲,۴ | ۱,۲,۶ | ۱,۴,۶ | ۲,۴,۶ |
|-----------------------------|---------------------|---------------------------------|---------------------|---------------------------------|
| جاگشت‌های سه رقم انتخاب شده | ۱۲۴ | ۱۲۶ | ۱۴۶ | ۲۴۶ |
| | ۱۴۲ | ۱۶۲ | ۱۶۴ | ۲۶۴ |
| | ۲۴۱ | ۲۱۶ | ۴۱۶ | ۴۲۶ |
| | ۲۱۴ | ۲۶۱ | ۴۶۱ | ۴۶۲ |
| | ۴۱۲ | ۶۱۲ | ۶۱۴ | ۶۲۴ |
| | ۴۲۱ | ۶۲۱ | ۶۴۱ | ۶۴۲ |
| | $A_1 = \{1, 2, 4\}$ | $A_2 = \{\dots, \dots, \dots\}$ | $A_3 = \{1, 4, 6\}$ | $A_4 = \{\dots, \dots, \dots\}$ |

$$\text{تعداد انتخاب‌های } r \text{ شیء از } n \text{ شیء} = \frac{2^4}{6} = 4$$

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء را که جایه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = {}^n_r$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C_r^n = {}^n_r = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستمان هدیه بدهیم؟

حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$${}^7_3 = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست).

روش اول: $\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \longrightarrow \cdots \times \underline{\quad} \times \cdots \times \cdots \times \underline{\quad}$

$$P(9, \dots) = \frac{9!}{(9-\dots)!} = \dots$$

۲. به چند طریق می‌توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟
در ساختن تیم با جایه‌جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی‌شود بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{تعداد تیم‌های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{6! \times \dots} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می‌سازد (در مجموعه‌ها جایه‌جایی اعضا اهمیت ندارد): بنابراین، داریم:

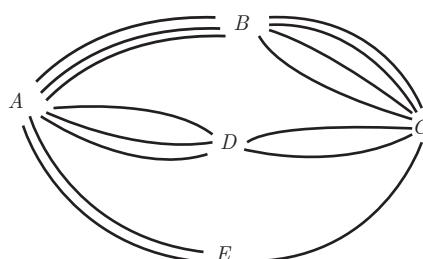
$$\text{تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times \dots} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \dots}{3! \times \dots} = 56$$

۴. در جعبه‌ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره‌های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده‌اند). در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

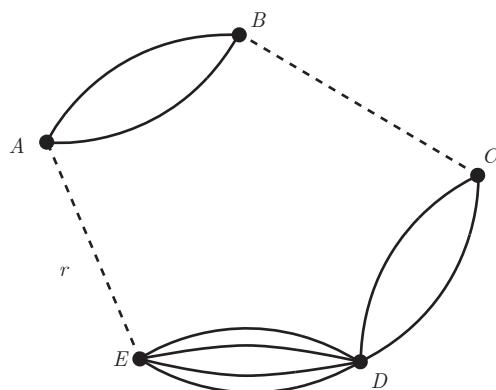
$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{3! \times \dots} = 84$$

تمرین

۱. می‌خواهیم از بین ۱۰ دانشآموز کلاس دهم و ۱۱ دانشآموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانشآموز کلاس دوازدهم یک دانشآموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می‌توانیم این دانشآموز را انتخاب کنیم؟
۲. بین پنج شهر E, D, C, B, A مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. مشخص کنید به چند طریق می‌توان:
- (الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟
 - (ب) از شهر C به شهر A و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟
 - (پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف : (با معنی یا نبی معنی)
 الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟
 ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟
 پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟
۴. یک دوره بازی فوتیال بین ۱۰ تیم فوتیال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟
۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟
۶. مجموعه $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\} = A$ مفروض است؛ الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟ ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگ تراز ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟ پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
 ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟
 ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟
۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:
 الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.
 ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.
 پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.
 ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.
۹. مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5)$ باشد.
۱۰. تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر E به D را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از شهر A به شهر D سفر کرد.



درس ۲

احتمال

فعالیت

نرگس هر روز صبح ساعت ۷ از منزل خارج می‌شود؛ با وسایل نقلیه عمومی به مدرسه می‌رود و به طور معمول، قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد. امروز صبح نیز نرگس مانند هر روز رأس ساعت ۷ از منزل خارج شده است. آیا می‌توانید به طور قطع بگویید که او قبل از ملیکا به مدرسه می‌رسد؟

هیچ کس نمی‌تواند به این پرسش پاسخ قطعی دهد. تجربه نشان داده است که اگر وضعیت مانند هر روز عادی باشد، نرگس به موقع به مدرسه می‌رسد، اما آیا وضعیت همیشه عادی است؟

عامل‌های زیادی می‌توانند وضع را از حالت عادی خارج کنند؛ مانند میزان ترافیک. از طرفی رفت و آمد در خیابان‌ها همیشه در حال تغییر است، آغاز حرکت و سرعت وسایل نقلیه عمومی به طور معمول منظم نیست و... . بنابراین: دو وضعیت وجود دارد: یکی اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه برسد و دوم اینکه نرگس قبل از ملیکا به مدرسه نرسد.

پدیده‌هایی وجود دارند که نتیجه آنها از قبل به طور قطع مشخص نیست اما از وقوع همه حالت‌های ممکن در آنها اطلاع داریم. برای مثال، وقتی از کیسه‌ای که شامل پنج مهره قرمز و یک مهره سبز است، به طور تصادفی مهره‌ای خارج می‌کنیم، می‌دانیم که رنگ مهره خارج شده سبز یا قرمز است اما قبل از بیرون کشیدن مهره، رنگ آن به طور قطعی مشخص نیست. این گونه آزمایش‌ها را آزمایش‌های تصادفی می‌نامیم.



به پدیده‌ها یا آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص نیست، پدیده یا آزمایش تصادفی می‌گویند. در پدیده‌های تصادفی از همه نتیجه‌های ممکن اطلاع داریم اما از اینکه کدام حالت قطعاً رخ می‌دهد، اطمینان نداریم. به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گوییم.

۱. چند آزمایش تصادفی مثال بزنید.

به آزمایش‌هایی که نتیجه آنها قبل از اجرای آزمایش به طور قطع مشخص باشد، آزمایش‌ها یا پدیده‌های قطعی می‌گوییم. برای مثال، چنانچه سنگی را به داخل استخر آبی پرتاب کنیم، قبل از اجرای آزمایش می‌دانیم که سنگ به داخل آب فرو می‌رود یا پیش از پرتاب یک سکه، می‌دانیم که سکه روی زمین می‌نشیند. این گونه پدیده‌ها، آزمایش‌های قطعی هستند.

۲. چند آزمایش قطعی مثال بزنید.

کار در کلاس

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر تصادفی و کدام یک قطعی است؟ چرا؟

- الف) وجود دانش آموزی که سن او بیشتر از ده سال باشد، در کلاس دوازدهم؛
ب) در ابتدای مسابقه فوتیال، پرتاب سکه‌ای که در یک طرف آن عدد ۱ و در طرف دیگر شش عدد ۲ حک شده باشد؛
پ) مشاهده دو مهره سفید، پس از خارج کردن دو مهره از جعبه‌ای که در آن ۷ مهره سفید وجود دارد؛
ت) پیش‌بینی نتیجه بازی فوتیال بین دو تیم، قبل از بازی؛
ث) در یک بازی بین دو نفر، سکه‌ای پرتاب می‌شود و به دنبال آن تاسی انداخته می‌شود. اگر شخصی سکه‌اش رو و تاسش زوج بیاید، برنده است. آیا قبل از بازی می‌توان نفر برنده را مشخص کرد؟

۲. از ۳ مداد و ۵ خودکاری که در یک جعبه قرار دارند، به طور تصادفی یکی از آنها را خارج می‌کنیم.

- الف) آیا مجموعه دو عضوی {خودکار، مداد} می‌تواند همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را نشان دهد؟
ب) به نظر شما چگونه می‌توان همه برآمدهای ممکن این آزمایش تصادفی را مشخص کرد؟
- در این کتاب، اشیای مورد بحث را با شماره‌گذاری متمایز می‌کنیم.



فضای نمونه

در پرتاب یک تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را خواهیم داشت، مجموعه همه برآمدهای ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم.

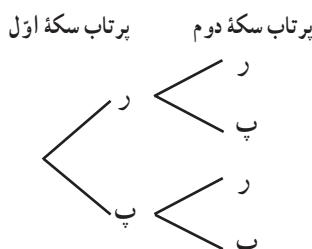


بنابراین، در پی تاب‌پیک تاسی، فضای نمونه برای است با: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

فَعَالِتْ

فضای نمونه هر پک از آزمایش های تصادفی، زیر را بتوسیله.

۱۔ پرتاب دو سکه با هم.



$$S = \{(+, +), (+, -), (-, +), (-, -)\}$$

۲. پرتاب سه سکه با هم (پرتاب یک سکه سه بار)

۳۔ یہ تاب یک تاس و یک سکھ باہم۔

کار در کلاس

۱. برای تعیین فضای نمونه پرتاب دو تاس آبی و قرمز، جدول زیر را کامل کنید. سپس به کمک اصل ضرب، درستی تعداد کل حالات موجود در جدول را بررسی کنید.

|  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| 1  | (1, 1) | (1, 2) | | | | (1, 6) |
| 2  | (2, 1) | (2, 2) | | | | |
| 3  | | | (3, 3) | | (3, 5) | |
| 4  | | | | (4, 4) | | |
| 5  | | | (5, 3) | | | |
| 6  | | | | | (6, 6) | |

۲. سه دوست با نام‌های علی، پارسا و محمد در یک ردیف کنار هم می‌نشینند. فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید. چگونه می‌توان تعداد همه برآمدهای این آزمایش تصادفی را بدون شمردن، مشخص کرد؟
۳. در کیسه‌ای ۳ مهره آبی و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را یک جا از کیسه خارج می‌کنیم. تعداد اعضای فضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

پیشامد

با مفهوم مجموعه و زیرمجموعه در کلاس نهم آشنا شده‌اید. مجموعه A را زیرمجموعه B می‌گوییم، هرگاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد؛ در این صورت می‌نویسیم： $A \subseteq B$. برای مثال :

$$\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

از طرفی، می‌دانیم $A \subseteq A$ ؛ یعنی هر مجموعه‌ای زیرمجموعه خودش است و مجموعه‌نهی زیرمجموعه همه مجموعه‌ها است؛ یعنی $\emptyset \subseteq A$.

مثال : تمام زیرمجموعه‌های $\{a, b, c\} = A$ را بنویسید.
حل :

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

مثال : در پرتاب یک تاس، پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) عدد کوچک‌تر از ۷ ظاهر شود. ب) عدد بزرگ‌تر از ۷ ظاهر شود.

حل :

$$\text{الف)} \quad A = \{\} \quad \text{ب)} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

به هر یک از زیرمجموعه‌های فضای نمونه S یک پیشامد می‌گویند. از آنجا که $S \subseteq \emptyset$ ، پس \emptyset یک پیشامد روی S است و آن را پیشامد غیرممکن (شنیدنی)، همچنین $S \subseteq S$ پس S نیز یک پیشامد است که آن را پیشامد حتمی می‌نامیم.

کار در کلاس

۱. سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم؛ می‌دانیم $\{p, r\} = S$. تمام پیشامدهای ممکن برای این فضای نمونه را بنویسید.
۲. مریم، ملیکا و سوگند پول‌هایشان را روی هم گذاشتند و یک رمان درباره دفاع مقدس از نمایشگاه کتاب مدرسه خریدند. سپس، اسامی خود را روی سه کارت تمایز نوشتند و داخل کیسه‌ای انداختند. آنها با هم قرار گذاشتند که یک کارت را به طور تصادفی از کیسه خارج کنند و نام هر کسی که روی آن کارت بود، ابتدا کتاب را به منزل بیرد و مطالعه کند. فضای نمونه این پدیده تصادفی را بنویسید. سپس، تمام زیرمجموعه‌های یک عضوی S را مشخص کنید. اگر قرار باشد دو نفر از آنها بعد از مطالعه کتاب، با هم خلاصه آن را در کلاس ارائه کنند، پیشامدهای ممکن را بنویسید.
۳. تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر پس از نشستن تاس روی زمین، عدد ۲ نمایان شود، به نظر شما در این آزمایش تصادفی کدام یک از پیشامدهای زیر رخ داده‌اند؟

$$A = \{3, 2, 5\}$$

الف)

$$B = \{2\}$$

ب)

(پ)

$$C = \{2, 4, 6\}$$

برای اینکه یک پیشامد رخ دهد، کافی است یکی از برآمدهای آن در آزمایش تصادفی به وقوع بپیوندد.

۴. دو تاس را پرتاب می‌کنیم؛ پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) اعداد رو شده از دو تاس مانند هم باشد.

$$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6)\}$$

ب) مجموع اعداد برآمده از دو تاس برابر با ۷ باشد.

پ) مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۱۳ باشد.

ت) حاصل ضرب اعداد برآمده از دو تاس کمتر از ۳۷ باشد.

۵. در یک برنامه کوهنوردی، ۵ دانشآموز سال دهم، ۶ دانشآموز سال یازدهم و ۴ دانشآموز سال دوازدهم شرکت دارند. قرار

است یک گروه پیشتاز ۳ نفره از بین آنها برای صعود انتخاب کنیم. تعداد عضوهای پیشامدهای زیر را مشخص کنید.

الف) سه نفر دانشآموز پیشتاز از سه پایه مختلف باشند.

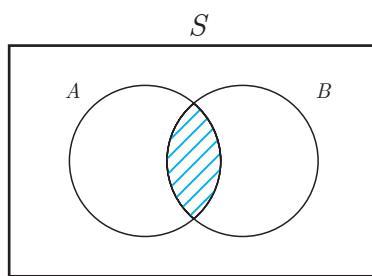
$$n(A) = \binom{5}{1} \times \binom{6}{1} \times \binom{4}{1} = \dots \times \dots \times \dots = 120$$

ب) حداقل ۲ دانشآموز در این گروه پیشتاز از دانشآموزان سال یازدهم باشند.

اعمال روی پیشامدها

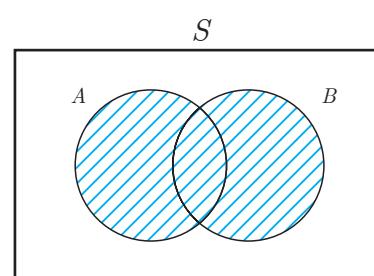
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند؛ اجتماع و اشتراک دو مجموعه A و B ، تفاصل B از A و متمم مجموعه A را به صورت

زیر یادآوری می‌کنیم.



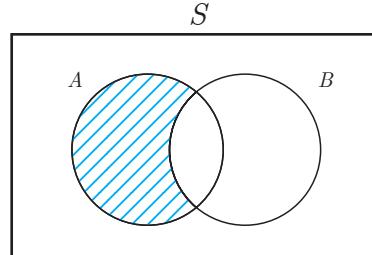
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

(شکل ۱)



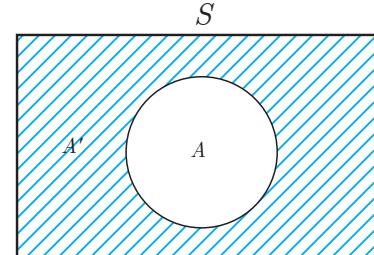
$$A \cup B = \{x \in S \mid x \in A \vee x \in B\}$$

(شکل ۲)



$$A - B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

(شکل ۳)



$$A' = \{x \in S \mid x \notin A\}$$

(شکل ۴)

هرگاه A و B دو پیشامد در فضای نمونه S باشند :

(الف) پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A و B رخ دهند. (شکل ۱)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد.

$$A = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\} : \text{یکی از تاس‌ها ۵ باشد}$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\} : \text{مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد}$$

برای مشخص کردن پیشامدی که در آن یکی از تاس‌ها ۵ و مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۶ باشد، کافی است $A \cap B$ را محاسبه کنیم.

$$A \cap B = \{(1, 5), (5, 1)\}$$

(ب) پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامدهای A یا B (حداقل یکی از پیشامدها) رخ دهند. (شکل ۲)

دو تاس را پرتاب می‌کنیم. پیشامد آن را مشخص کنید؛ طوری که دو تاس یکسان یا مجموع اعداد برآمده از دو تاس ۴ باشد.

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\} : \text{دو تاس یکسان}$$

$$B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} : \text{مجموع ۴ باشد}$$

پیشامد مورد نظر برابر با $A \cup B$ است.

$$A \cup B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 3), (3, 1)\}$$

(پ) پیشامد $A - B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد و پیشامد B رخ ندهد. (شکل ۳)

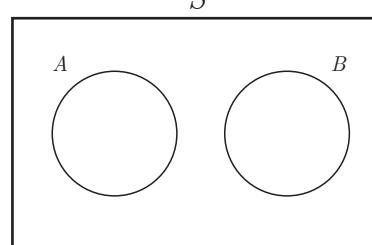
(ت) پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. (شکل ۴)

در این حالت A و A' را دو پیشامد متمم می‌گوییم و همواره داریم :

$$A \cup A' = S, \quad A \cap A' = \emptyset$$

مثال : هرگاه A و B دو پیشامد ناتهی در فضای نمونه S باشند، به طوری که $B - A = B$ و $A - B = A$ ، در این صورت پیشامد $A \cap B$ را محاسبه کنید.

حل : چون $A - B = A$ و $B - A = B$ و از آنجا که A و B پیشامدهای ناتهی هستند، بنابراین A و B عضو مشترکی ندارند؛ در این حالت $A \cap B = \emptyset$.

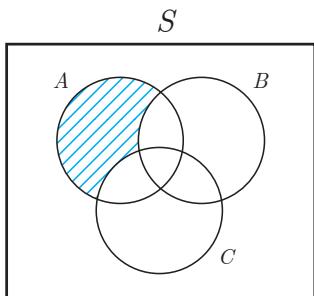


هرگاه A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند، به طوری که $A \cap B = \emptyset$ ، در این صورت پیشامدهای A و B را ناسازگار می‌گوییم.

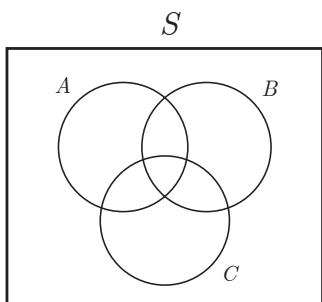
برای مثال، در پرتاب یک تاس پیشامدهای زوج آمدن و فرد آمدن، ناسازگارند.

کار در کلاس

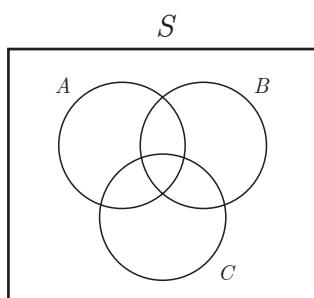
۱. تاسی را پرتاب می‌کنیم؛ هر یک از پیشامدهای زیر را با اعضا مشخص کنید.
 - پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج و اقل باشد.
 - پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج یا اقل باشد.
 - پیشامد اینکه عدد رو آمده زوج باشد ولی اقل نباشد.
 - پیشامد اینکه عدد رو آمده اقل باشد ولی زوج نباشد.
 - پیشامد اینکه عدد رو آمده اول نباشد.



$$A - (B \cup C)$$



- پیشامدهای A و B رخ دهنده ولی پیشامد C رخ ندهد.



- پیشامدهای A یا B رخ دهنده ولی پیشامد C رخ ندهد.

۲. خانواده‌ای صاحب ۳ فرزند است. پیشامدهای زیر را مشخص کنید.
 - الف) پیشامد A اینکه همه فرزندان خانواده دارای یک جنسیت باشند.
 - ب) پیشامد B اینکه دو فرزند خانواده پسر و یک فرزند دختر باشند.

ج) پیشامد C اینکه حداقل دو فرزند این خانواده دختر باشند.

با توجه به پیشامدهای A و B و C به سؤالات زیر پاسخ دهید :

آیا پیشامدهای A و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و B ناسازگارند؟

آیا پیشامدهای C و A ناسازگارند؟

۴. دو پیشامد ناسازگار از یک آزمایش تصادفی را بنویسید.

احتمال یک پیشامد

فرض کنید $S \neq \emptyset$ فضای نمونه متناهی یک پدیده تصادفی باشد. اگر S ، n برآمد برای وقوع داشته باشد و A پیشامدی در S باشد، در این صورت احتمال وقوع پیشامد A را با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم و مقدار آن را طبق دستور زیر محاسبه می‌کیم.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

فعالیت

۱. چنان که پیشامد A نشدنی باشد، یعنی $A = \emptyset$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۲. در حالتی که پیشامد A حتمی باشد، یعنی $A = S$ ، در این صورت مقدار $P(A)$ را محاسبه کنید.

۳. هرگاه $A \subseteq B$ ، در این صورت جاهای خالی را پر کنید.

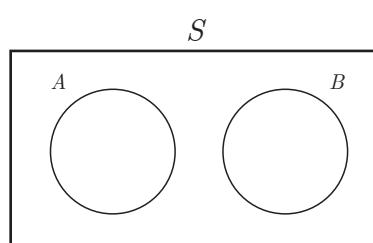
$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq \dots \Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{\dots}{\dots} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

۴. با توجه به ۱ و ۲ و ۳، اگر A پیشامد دلخواهی در فضای نمونه S باشد، در این صورت داریم :

$$\circ \leq P(A) \leq 1$$

۵. هرگاه A و B دو پیشامد ناسازگار در فضای نمونه S باشند، با پر کردن جاهای خالی مقدار $P(A \cup B)$ را طبق اصل جمع پیدا کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + \dots \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \dots \Rightarrow P(A \cup B) = \dots + \dots$$



$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

کار در کلاس



۱. یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می‌کنیم؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:
الف) تاس زوج بیاید.

می‌دانیم فضای نمونه این آزمایش تصادفی ۱۲ عضو دارد؛
بنابراین، $n(S) = 12$.

$$S = \{(p, 1), (p, 2), (p, 3), (p, 4), (p, 5), (p, 6), (r, 1), (r, 2), (r, 3), (r, 4), (r, 5), (r, 6)\}$$

پیشامد اینکه تاس زوج بیاید، برابر است با:

$$A = \{(p, 2), (p, 4), (p, 6), (r, 2), (r, 4), (r, 6)\} : n(A) = 6$$

بنابراین، داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

ب) سکه پشت بیاید.

پ) تاس زوج یا سکه رو بیاید.

ت) تاس فرد و سکه پشت بیاید.



۲. یک تاکسی دارای ۵ سرنشین است؛ مطلوب است محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر پنج نفر آنها در ماه فروردین متولد شده باشند.

هر یک از پنج نفر می‌توانند در هر یک از ۱۲ ماه سال به دنیا آمده باشند؛ بنابراین، در محاسبه $n(S)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر با ۱۲ حالت پر می‌شوند.

$$\frac{12}{\text{نفر اول}} \cdot \frac{12}{\text{نفر دوم}} \cdot \frac{12}{\text{نفر سوم}} \cdot \frac{12}{\text{نفر چهارم}} \cdot \frac{12}{\text{نفر پنجم}} \rightarrow n(s) = 12^5$$

برای محاسبه تعداد اعضای پیشامد A ، به طوری که همه آنها در فروردین متولد شده باشند، کافی است در محاسبه $n(A)$ به کمک اصل ضرب، هر یک از خانه‌های زیر فقط با یک حالت پوشوند.

$$\frac{1}{\text{نفر پنجم}} \quad \frac{1}{\text{نفر چهارم}} \quad \frac{1}{\text{نفر سوم}} \quad \frac{1}{\text{نفر دوم}} \quad \frac{1}{\text{نفر اول}} \rightarrow n(A) = 1$$

در نتیجه داریم :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{12^5}$$

ب) هر پنج نفر آنها در یک ماه از سال متولد شده باشند.

پ) تولد هیچ دو تای آنها در یک ماه نباشد.

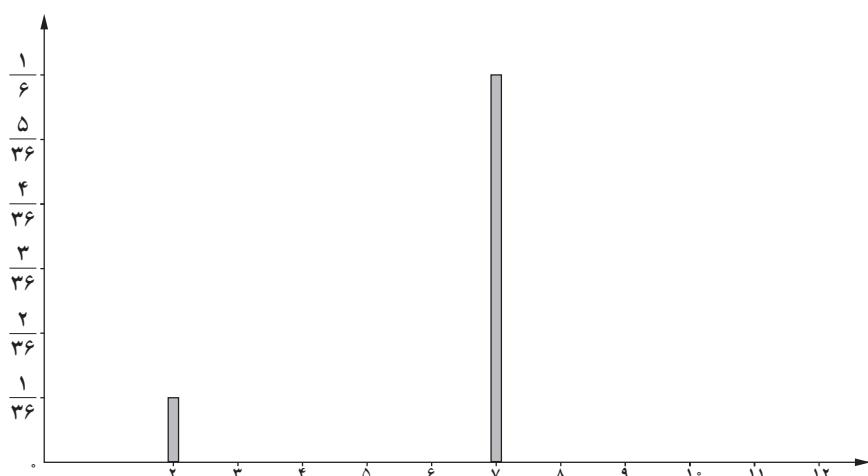
۳. در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره‌های ۲، ۴، ۳، ... و ۱۲ را نسبت می‌دهیم. سپس با پرتاب دو تاس و مجموع اعداد برآمده از آنها، نفر برنده مشخص می‌شود.

الف) احتمال برنده شدن چه شماره‌ای نسبت به بقیه بیشتر است؟

ب) احتمال برنده شدن کدام شماره‌ها از همه کمتر است؟

پ) آیا کسی که احتمال برنده شدنش کمتر است، ممکن است در این مسابقه برنده شود؟ چرا؟

ت) دستگاه مختصاتی رسم کنید و روی محور افقی، مجموع اعداد برآمده از دو تاس و روی محور عمودی، احتمال متناظر با هر یک از آنها را بنویسید. سپس، نمودار میله‌ای را مطابق شکل زیر رسم کنید.



فعالیت

در جعبه‌ای ۳ مداد و ۵ خودکار وجود دارد. از این جعبه به‌طور تصادفی یک شیء خارج می‌کنیم. مطلوب است محاسبه :

الف) احتمال این را بباید که شیء انتخابی مداد باشد؛ $P(A)$.

ب) احتمال این را بباید که شیء انتخابی خودکار باشد؛ $P(B)$.

پ) احتمال این را بباید که شیء انتخاب شده مداد نباشد؛ $P(A')$.

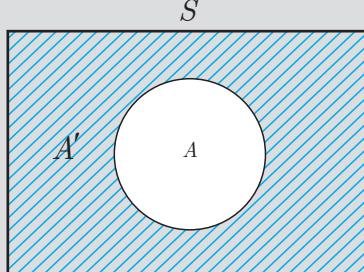
ت) پاسخ‌های قسمت‌های ب و پ را با هم مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ث) حاصل $P(A) + P(A')$ را پیدا کنید.



اگر $P(A)$ احتمال وقوع پیشامد A در فضای نمونه S باشد، در این صورت، احتمال واقع نشدن آن پیشامد را با $P(A')$ نمایش می‌دهیم و داریم : $P(A') = 1 - P(A)$ یا $P(A) + P(A') = 1$. در این حالت، A و A' را

دو پیشامد متمم می‌گوییم.



کار در کلاس

۱. احتمال اینکه فردا بارانی باشد برابر با $\frac{1}{10}$ است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا بارانی نباشد.
۲. احتمال اینکه کیارش فردا به مدرسه نزود برابر با 10% است. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه فردا کیارش به مدرسه برود.
۳. احتمال اینکه ریحانه امشب سریال شبکه یک سیما را تماشا نکند برابر با $\frac{32}{49}$ است، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه ریحانه امشب سریال را تماشا کند.

مثال : در یک فروشگاه ورزشی تعدادی پیراهن ورزشی شامل ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن زرد در یک رخت آویز قرار دارند. شخصی درخواست می‌کند که فروشنده به طور تصادفی ۳ پیراهن انتخاب کند و برای او بفرستد.

الف) احتمال این را که ۳ پیراهن از یک رنگ باشند، محاسبه کنید.

ب) احتمال این را که رنگ ۲ پیراهن متفاوت باشد، محاسبه کنید.

پ) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، محاسبه کنید.

ت) احتمال این را که حداقل ۲ پیراهن آبی باشند، محاسبه کنید.

ث) احتمال این را که رنگ ۳ پیراهن آبی نباشد، محاسبه کنید.

ج) جواب‌های قسمت‌های ت و ث را مقایسه کنید؛ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

حل : الف) چون قرار است ۳ پیراهن از بین ۱۰ پیراهن انتخاب شود، بنابراین داریم :

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120$$

چنانچه هر سه پیراهن یک رنگ باشند، آن‌گاه هر سه قرمز یا هر سه آبی هستند؛ بنابراین، اگر A پیشامد هر سه آبی باشند، در این صورت می‌خواهیم $P(A \cup B)$ را محاسبه کنیم. از آنجا که A و B ناسازگاراند، داریم :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{\binom{4}{3}}{120} + \frac{\binom{4}{3}}{120} = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

ب) برای اینکه رنگ سه پیراهن متفاوت باشد، آن‌گاه یک پیراهن قرمز، یک پیراهن آبی و یک پیراهن زرد است؛ بنابراین، داریم :

$$n(C) = \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 4 \times 2 = 32 ; \quad P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}$$

پ) برای اینکه حداقل ۲ پیراهن قرمز باشند، آنگاه ۲ پیراهن قرمز یا ۳ پیراهن قرمزند؛ بنابراین، مشابه با قسمت «الف» خواهیم داشت:

$$\text{فرموده} \times \text{فرموده} = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 = 40 \quad ; \quad P(D) = \frac{n(D)}{n(S)} = \frac{40}{120} = \frac{1}{3}$$

ت) برای اینکه حداقل دو پیراهن آبی باشند، باید دو پیراهن آبی و یا صفر پیراهن آبی داشته باشیم:

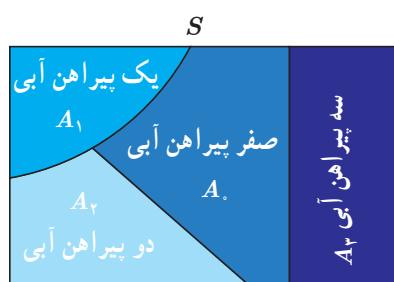
$$n(E) = \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \times \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \times \binom{6}{3} = 6 \times 6 + 4 \times 15 + 1 \times 20 = 116$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ث) اگر $P(F)$ احتمال ۳ پیراهن آبی باشد، آنگاه $P(F') = 1 - P(F)$ احتمال این است که ۳ پیراهن آبی نباشند؛ بنابراین:

$$P(F') = 1 - P(F) = 1 - \frac{\binom{4}{2} \times \binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{4}{120} = \frac{116}{120} = \frac{29}{30}$$

ج) قسمت‌های «ت» و «ث» یکسان‌اند. یعنی می‌توان راه حل قسمت «ث» را برای قسمت «ت» به کار برد. چنانچه در انتخاب ۳ پیراهن به دنبال تعداد پیراهن‌های آبی باشیم، پیشامدهای ممکن روی فضای نمونه به صورت زیر است.



$$P(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = P(S) = 1$$

تمرین

۱. کدام یک از پدیده‌های زیر آزمایش تصادفی و کدام یک آزمایش قطعی است؟

الف) نام ۲۰ دانشآموز را روی ۲۰ کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، به طور تصادفی یک کارت بیرون می‌کشیم تا نام یکی از دانشآموزها استخراج شود.

ب) مقداری آب را حرارت می‌دهیم تا به بخار تبدیل شود.

پ) نتیجه یک آزمون چهارگوابی، که نیمی از سوالات آن را شناسی پاسخ داده‌ایم.

ت) در یک بازی ساده دو نفره، یکی از دو نفر مراحل زیر را انجام می‌دهد.

– عددی را انتخاب می‌کند.

– سه واحد به آن عدد می‌افزاید.

– سپس حاصل را دو برابر می‌کند.

– از عدد حاصل ۲ واحد کم می‌کند.

– نتیجه به دست آمده را نصف می‌کند.

– از حاصل به دست آمده، عدد او لیه را کم می‌کند.

– در مرحله آخر، فرد دوم به جای شخص محاسبه‌کننده پاسخ را اعلام می‌کند.

۲. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو ظاهر شد، آن‌گاه تاس را می‌ریزیم. در غیر این صورت، یک بار دیگر سکه را می‌اندازیم.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.

ب) پیشامد A را که در آن عدد ظاهر شده روی تاس زوج باشد یا سکه پشت بیاید، با اعضا مشخص کنید.

۳. هر یک از اعداد فرد طبیعی کوچک‌تر از ۲۰ را روی یک کارت می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی

یک کارت را بر می‌داریم؛ مطلوب است تعیین :

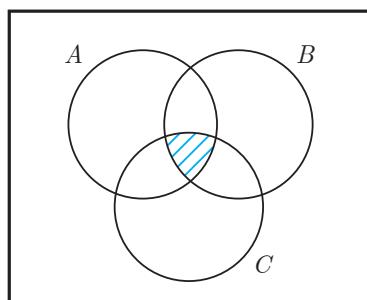
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب ۳ باشد.

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

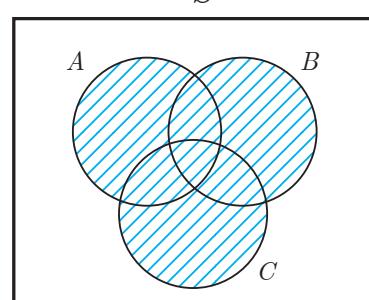
پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت، مجذور کامل باشد. ت) پیشامدهای $A \cap B$ و $A - B$ را با اعضا مشخص کنید.

۴. برای هر یک از پیشامدهای زیر یک عبارت توصیفی و یک عبارت مجموعه‌ای بنویسید.

$$S$$



(الف)



(ب)

۵. هر یک از اعداد دو رقمی را که با ارقام $1, 2, 3, 4$ می‌توان نوشت، روی کارت‌هایی می‌نویسیم و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یک کارت را به طور تصادفی خارج می‌کنیم. الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی را مشخص کنید.
ب) پیشامد A که در آن عدد روی کارت مضرب 6 باشد. پ) پیشامد B که در آن عدد روی کارت اول باشد.

۶. خانواده‌ای دارای 3 فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشند. پ) پیشامد B که در آن فقط یک فرزند دختر باشد.
ت) پیشامد C که در آن حداقل 2 فرزند پسر باشند. ث) پیشامد D که در آن حداکثر یک فرزند پسر باشد.

۷. خانواده‌ای دارای 4 فرزند است.

الف) فضای نمونه مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چند عضو دارد؟

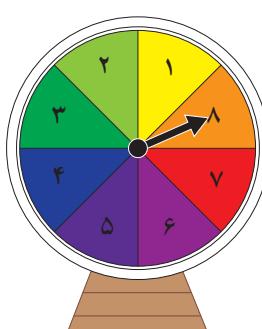
ب) پیشامد A را مشخص کنید؛ طوری که در آن دو فرزند سوم و چهارم دختر باشند.
پ) پیشامد C که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از تعداد فرزندان پسر باشد. ت) آیا پیشامدهای A و C ناسازگارند؟

۸. از جعبه‌ای که شامل 12 سیب سالم و 5 سیب لکه‌دار است، 3 سیب را به طور تصادفی بر می‌داریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) هر سه سیب سالم باشند. ب) دو سیب سالم و یک سیب لکه‌دار باشند.

پ) تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های لکه‌دار بیشتر باشد.

۹. عقرهٔ دستگاه چرخنده زیر، پس از به حرکت درآمدن روی یکی از 8 ناحیه می‌ایستد و عددی را نشان می‌دهد. چقدر احتمال دارد که :



الف) عقرهٔ روی یک عدد اول باشد.

ب) عقرهٔ یک عدد اول یا فرد را نشان دهد.

پ) عقرهٔ روی یک عدد مضرب 3 باشد.

۱۰. 7 پرچم مختلف را به هفت میلهٔ پرچم نصب کرده‌ایم و روی میله‌ها شماره‌های 1 تا 7 را حک کرده‌ایم. چنانچه این پرچم‌ها به طور تصادفی کنار هم قرار گیرند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه میلهٔ پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

۱۱. یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه‌بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه احتمال اینکه در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه‌بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

۱۲. در یک پارک جنگلی حفاظت شده، ۲۰ قوچ وحشی البرز مرکزی وجود دارد؛ ۵ تا از آنها را می‌گیرند و پس از نشان دار کردن، رهایشان می‌کنند. بعد از مدتی، محیط‌بازان به طور تصادفی ۷ تا از آنها را می‌گیرند و می‌خواهند تعداد قوچ‌های نشان دار را بشمارند. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه حداقل ۲ قوچ نشانه‌دار باشند.

۱۳. انجمن اولیا و مربیان یک دبیرستان ۱۰ نفر عضو دارد. به یک برنامه خاص، ۵ نفر رأی موافق، ۳ نفر رأی مخالف و ۲ نفر رأی ممتنع داده‌اند. از بین آنها به طور تصادفی ۳ نفر انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه :

الف) حداقل ۲ نفر از افراد انتخابی موافق برنامه باشند.

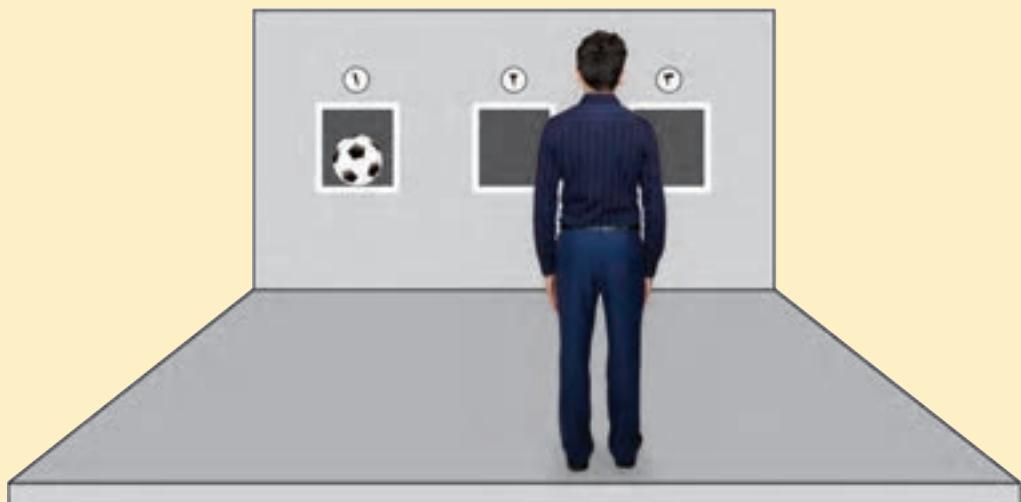
ب) نظر هیچ دو نفری از آنها مانند هم نباشد.

خواندنی

در یک مسابقه، سه دریچه مطابق شکل زیر در مقابل یک شرکت کننده قرار دارد. ناگهان یک دریچه به طور تصادفی باز می‌شود و توپی از آن به طرف شرکت کننده پرتاب می‌شود. اگر این فرد بتواند توپ را بگیرد، برنده است و در غیر این صورت، بازنده می‌شود.

به نظر شما، احتمال پرتاب توپ از هر دریچه چقدر است؟

اگر یک دریچه را غیرفعال کنند و شرکت کننده شماره دریچه غیرفعال را ندانند، در این صورت احتمال پرتاب توپ از هر دریچه برای شرکت کننده در مسابقه چقدر است؟



درس ۳

چرخه آمار در حل مسائل

دنیای امروز پر از اطلاعاتی است که ما در بخش‌های مختلف زندگی با آنها روبرو می‌شویم. بنابراین، برای اینکه بتوانیم بهتر زندگی کنیم و درباره مسائل مختلف بهتر تصمیم بگیریم، لازم است بتوانیم این اطلاعات را به خوبی درک و تحلیل کنیم. درک صحیح شاخص‌ها، نمودارها، اصطلاحات و مفاهیم آماری به ما کمک می‌کند که تفسیر درستی از این اطلاعات داشته باشیم، محدودیت‌های نتایج بدست آمده را بشناسیم و در نهایت، با استدلالی درست، بهتر تصمیم بگیریم. در این درس می‌خواهیم از شکل‌گیری یک مسئله در محیط زندگی‌مان تا یافتن پاسخی برای آن، از آمار استفاده کنیم و آماری فکر کردن را تمرین کنیم.

فعالیت

❸ دانش‌آموزان یک مدرسه، روزانه زمان زیادی را به استفاده از تلفن‌های هوشمند اختصاص می‌دادند. مشاوران آموزشی مدرسه تصمیم گرفتند دسترسی دانش‌آموزان به تلفن‌های هوشمند را در جهت اهداف آموزشی مدرسه هدفمند کنند اما از میزان و چگونگی استفاده دانش‌آموزان از تلفن‌های هوشمند اطلاع دقیقی نداشتند و بنابراین، برنامه‌ریزی برای این هدف ممکن نبود. پس، قبل از هر چیز مسئله مشاوران آموزشی این بود که بفهمند: «دانش‌آموزان پایه‌های دهم، یازدهم و دوازدهم این مدرسه به طور متوسط روزانه چه مدت و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟»

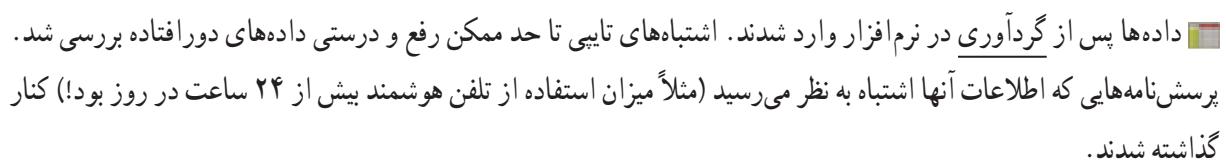
❹ گروه اجراکننده این پژوهه، پرسشنامه‌ای طرحی کردند و با انتخاب تصادفی ۲۰ نفر از هر پایه، از این نمونه از دانش‌آموزان خواستند که این پرسشنامه را تکمیل کنند:

- الف) به طور متوسط، روزانه چند دقیقه از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنید؟
ب) از میان گزینه‌های زیر سه فعالیتی را که بیش از دیگر گزینه‌ها با تلفن هوشمند خود انجام می‌دهید، علامت بزنید.
- خواندن کتاب الکترونیک
 - شبکه‌های اجتماعی
 - عکاسی
 - بازی
 - تماس تلفنی
 - تماشای فیلم یا گوش دادن به موسیقی

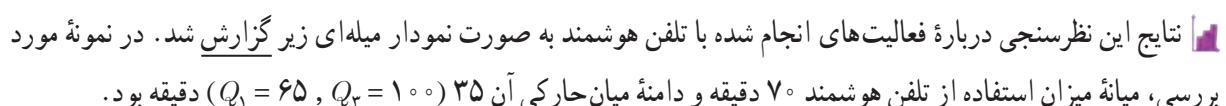
مشاوران مدرسه تصمیم داشتند با توجه به کمی بودن میزان استفاده از تلفن هوشمند، نتایج آن را به صورت میانه و دامنه میان‌چارکی^۱ گزارش کنند و درصد فراوانی هر یک از فعالیت‌ها را به صورت نمودار میله‌ای نمایش دهند.

- حدس می‌زنید دانشآموزان کلاس شما به طور متوسط روزانه چقدر و برای چه فعالیت‌هایی از تلفن‌های هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

● اگر واحد اندازه‌گیری مدت استفاده از تلفن هوشمند (دقیقه) در پرسش اول مشخص نمی‌شد، ممکن بود چه مشکلی پیش بیاید؟


 داده‌ها پس از گردآوری در نرم افزار وارد شدند. اشتباوهای تایپی تا حد ممکن رفع و درستی داده‌های دورافتاده بررسی شد. پرسش نامه‌هایی که اطلاعات آنها اشتباه به نظر می‌رسید (مثلاً میزان استفاده از تلفن هوشمند بیش از ۲۴ ساعت در روز بود!) کنار گذاشته شدند.

- ممکن است برخی دانشآموزان نخواهند کسی از جزئیات فعالیت‌های آنها با تلفن هوشمند باخبر شود. در طراحی پرسشنامه چگونه می‌توانستیم با احترام به حریم خصوصی افراد، داده‌های گردآوری شده را به واقعیت نزدیک‌تر کنیم؟


 نتایج این نظرسنجی درباره فعالیت‌های انجام شده با تلفن هوشمند به صورت نمودار میله‌ای زیر گزارش شد. در نمونه مورد بررسی، میانه میزان استفاده از تلفن هوشمند ۷۰ دقیقه و دامنه میان‌چارکی آن ۳۵ (۰_۱ = ۱۰۰, ۰_۹ = ۶۵) دقیقه بود.



- با توجه به چارک‌های گزارش شده، (تقریباً) چند درصد از دانشآموزان به طور متوسط بیش از ۱۰۰ دقیقه در روز با تلفن هوشمند خود کار می‌کنند؟
- با توجه به نمودار میله‌ای، بیشترین و کمترین فراوانی مربوط به کدام فعالیت‌هاست؟
- چرا در این نمودار میله‌ای، مجموع درصد فراوانی‌ها از ۱۰۰ بیشتر می‌شود؟

۱- پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم. در داده‌های مرتب شده، میانه داده‌های قبل از میانه را چارک اول (Q_1) و میانه داده‌های بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم. دامنه میان‌چارکی حاصل تفاضل چارک سوم و اول است که آن را با (IQR) Interquartile Range نمایش می‌دهیم.



باید توجه داشته باشیم که این نتایج فقط در مورد دانشآموزان پایه‌های این مدرسه (نه دانشآموزان دیگر مدارس) و فقط در مورد چگونگی استفاده از (نه ابزارهای دیگر) صادق است^۱.

● با توجه به نمودار میله‌ای صفحه پیش، دانشآموزان متوسطه دوم این مدرسه بیشتر برای انجام دادن چه فعالیت‌هایی از تلفن هوشمند خود استفاده می‌کنند؟

● از میانه و دامنه میان چارکی گزارش شده برای زمان استفاده روزانه از تلفن‌های هوشمند چه نتیجه‌ای می‌گیرید یا به زبان آماری، آنها را چگونه تفسیر می‌کنید؟

❖ مشاوران آموزشی، به کمک دانشآموزان و اولیا با بررسی نتایج و فعالیت‌هایی که بیشترین فراوانی را داشتند و با در نظر گرفتن ویژگی‌های دانشآموزان مدرسه به این نتیجه رسیدند که ۱) تشکیل یک گروه آموزشی در یکی از شبکه‌های اجتماعی می‌تواند عملکرد تحصیلی و ارتباط عاطفی معلم‌ها و دانشآموزان را بهبود بخشد؛ ۲) معلم‌ها می‌توانند با تهیه فیلم‌های آموزشی جذاب، محتوای درسی را به صورت فیلم در اختیار دانشآموزان قرار دهند و دانشآموزان در ساعاتی از شبانه‌روز که آمادگی بیشتری دارند، فیلم‌ها را تماشا کنند و پرسش‌هایشان را در کلاس به صورت حضوری با معلم‌ها در میان بگذارند؛ ۳) با برگزاری دوره‌های آموزشی و نمایشگاه‌هایی از آثار دانشآموزان، می‌توان علاقه دانشآموزان به عکاسی و درنتیجه، استفاده از تلفن‌های هوشمند را هدفمند کرد.



❖ در این نظرسنجی فقط درباره مدت زمانی که دانشآموزان در طول روز با تلفن‌هایشان کار می‌کنند، پرسیدیم اما اگر بخواهیم برنامه‌ای داشته باشیم که با استفاده از آن عملکرد تحصیلی دانشآموزان بهتر شود، باید در یک نظرسنجی دیگر، مدت زمانی را که دانشآموزان صرف کارهای مختلف می‌کنند، به تفکیک این فعالیت‌ها بدانیم.

همان‌طور که در فعالیت بالا دیدید، حل کردن مسئله‌های مرتبط با آمار به صورت چرخه‌ای کامل شامل گام‌های : ۱. بیان مسئله، ۲. طرح و برنامه‌ریزی، ۳. گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها، ۴. تحلیل داده‌ها و ۵. بحث و نتیجه‌گیری است.



۱- هنگامی که بر اساس داده‌های یک نمونه آماری، برای جامعه آماری مرتبط با آن نتیجه‌گیری می‌کنیم، به اصطلاح می‌گوییم نتایج را تعمیم داده‌ایم.

کار در کلاس

اگر کنون که چرخه حل مسئله را می‌شناسیم، می‌توانیم در جدول زیر نام هر گام و ترتیب آن را مقابل توضیحاتش بنویسیم. (مشاهده نمونه حل شده در سطر سوم می‌تواند به ما کمک کند.)

| ترتیب گام | نام گام | توضیح گام |
|-----------|------------|---|
| | | راهی برای رسیدن به پاسخ مسئله پیدا می‌کنیم. به نمونه‌گیری، شیوه اندازه‌گیری متغیر و چگونگی توصیف نتایج می‌اندیشیم. |
| | | نتایج بدست آمده را تفسیر می‌کنیم و پاسخی برای پرسش اصلی پیدا می‌کنیم. |
| ۱ | بیان مسئله | مسئله‌ای را که در دنیای واقعی وجود دارد به صورت یک مسئله شفاف و دقیق آماری مطرح می‌کنیم. |
| | | با استفاده از معیارها، نمودارها و مفاهیمی که آموخته‌ایم، نتایج را مناسب با هدف‌های کارمان، نوع متغیرها و ویژگی‌های داده‌ها گزارش می‌کنیم. |
| | | داده‌ها را گردآوری می‌کنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن می‌شویم. |

گام‌های چرخه آمار در حل مسائل

پیش از هر چیز خوب است بدانیم «چرا فرایند حل مسئله را «چرخه» می‌نامیم».

همان‌طور که در مثال «استفاده از تلفن هوشمند» دیدیم، گام‌های مختلف حل مسئله به ما کمک می‌کنند که برای پرسش اصلی پاسخی پیدا کنیم، اما اغلب پس از اجرای تمامی گام‌ها با روشن‌تر شدن ابعاد مختلف مسئله و براساس نتایج و تجربه بدست آمده، یک مسئله جدید دقیق‌تر شکل می‌گیرد. در واقع، برای پیدا کردن پاسخ پرسش اصلی تا رسیدن به یک جمع‌بندی منطقی، یک مسئله چندین بار بازیابی می‌شود. در این بخش، گام‌های چرخه حل مسئله را بیشتر بررسی می‌کنیم.

؟ گام اول (بیان مسئله)

طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است. بنابراین، پیش از هر چیز باید مسئله به درستی درک شود و سپس به‌طور دقیق تعریف و بیان گردد؛ یعنی با توجه به اهداف، بودجه، زمان و دیگر شرایط موجود، جامعه آماری را محدود، و هدف مطالعه را مشخص کنیم.



مثال: فرض کنید می‌خواهیم میزان فعالیت بدنی پسران کرمانشاه را بدانیم و برای آن برنامه‌ای داشته باشیم. پیش از هر چیز باید بتوانیم مسئله را دقیق تعریف کنیم. پس از مشورت با کارشناسان این حوزه متوجه می‌شویم که با توجه به عواملی مانند سن، محل سکونت (از نظر تزدیکی به مکان‌های ورزشی)، الگوهای فرهنگی فعالیت بدنی (مانند ارزشمندی ورزش‌های پهلوانی و...) یا توانایی‌ها و ناتوانی‌های

جسمانی، میزان فعالیت بدنی این افراد بسیار متفاوت است؛ پس، بدون محدود کردن جامعه آماری نمی‌توانیم پاسخ مشخصی برای این مسئله داشته باشیم.

بدین ترتیب، مثلاً «بررسی متوسط فعالیت بدنی هفتگی در هوای آزاد در میان پسران ۱۳ تا ۱۵ ساله یک مدرسه مشخص در کرمانشاه» می‌تواند به عنوان یک مسئله مطرح شود. چند مثال دیگر بزنید.

بحث و گفت و گو

هر یک از عوامل نام برد، (سن، محل سکونت و...) چگونه می‌تواند بر فعالیت بدنی جامعه آماری مورد بررسی تأثیر بگذارد؟ چه عوامل دیگری به تعریف دقیق مسئله کمک می‌کند؟ گروه اجرا کننده این مطالعه باید شامل چه متخصصانی باشد و دانش هر یک چه نقشی در این مطالعه دارد؟ (مثلاً متخصصان تربیت بدنی چگونه می‌توانند به اندازه‌گیری متغیر «فعالیت بدنی» کمک کنند؟)

گام ۲ (طرح و برنامه‌ریزی)

اندازه‌گیری یا سنجش، اولین قدم برای یافتن داده‌ها و بررسی متغیر مورد نظر است. در اندازه‌گیری، در واقع سعی می‌کنیم اطلاعات توصیفی (کیفی) را تا حد ممکن به اطلاعات کمی (عددی) تبدیل کنیم. انتخاب معیار اندازه‌گیری مناسب برای متغیرهایی مانند قد، وزن و دما آسان است؛ زیرا با ابزارهای آشنا می‌توانیم توصیف‌هایی مانند قد بلند، وزن مناسب یا هوای گرم را به کمیتی قابل فهم برای همه تبدیل کنیم. البته اندازه‌گیری همیشه این قدر هم آسان نیست. فرض کنید در مطالعه‌ای می‌خواهیم میزان «خوشحالی» افراد را اندازه‌گیری کنیم. چه پرسش‌هایی می‌تواند برای اندازه‌گیری این متغیر به ما کمک کند؟ آیا اندازه‌گیری دارایی‌ها، تحصیلات، دستاوردها، تعداد دوستان و... لزوماً مشخص می‌کند که هر فرد چقدر خوشحال است؟ احتمالاً این طور نیست. با توجه به اهمیت اندازه‌گیری یا می‌توانیم بفهمیم که حضور افراد متخصص در گروه هدایت‌کننده پژوهش چقدر مهم است. متخصصان، ابزارهای اندازه‌گیری یا پرسشنامه‌ها را طوری طراحی می‌کنند که با آنها بتوانیم همان متغیری را که مورد نظر است، اندازه‌گیریم. بدون مشورت با این افراد، ممکن است به جای «خوشحالی» مثلاً «رفاه» یا به جای «هوش» مثلاً «حافظه» اندازه‌گیری شود.

در مرحله طرح و برنامه‌ریزی علاوه بر توافق درباره چگونگی اندازه‌گیری متغیرهای مورد نظر، درباره اندازه نمونه، چگونگی نمونه‌گیری و همچنین شیوه تحلیل داده‌ها تصمیم‌گیری می‌شود.



تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه و تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می‌نامیم. هرچه پراکندگی متغیر مورد بررسی در جامعه بیشتر باشد، برای حصول اطمینان از وجود تنوع در نمونه، به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز داریم.

کار در کلاس

۱. در هر قسمت، برای بررسی کدامیک از موارد به اندازه نمونه بزرگ‌تری نیاز است؟ توضیح دهید.

الف) □ سن دانشآموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

□ معدل سال گذشته دانشآموزان در کلاسی که در آن درس می‌خوانید.

ب) □ بررسی متوسط حقوق معلمان یک مدرسه دولتی

□ بررسی متوسط حقوق کارکنان یک شرکت بزرگ خصوصی

۲. علی و امید در یک پروژه دانشآموزی می‌خواهند بررسی کنند که «نوجوانان منطقه ۲ آبادان در اوقات فراغت خود به چه فعالیت‌هایی مشغول‌اند و برای هر فعالیت چقدر وقت صرف می‌کنند».

علی پیشنهاد می‌کند: «برای نمونه‌گیری به چند مکان تفریحی، فرهنگی، مذهبی و ورزشی برویم و در هر مکان چند نوجوان را به طور تصادفی انتخاب کنیم و از آنها بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند». امید پیشنهاد می‌کند: «اگر اداره آموزش و پرورش منطقه موافقت کند، برای نمونه‌گیری فهرستی از دانشآموزان متوسطه اول و دوم منطقه ۲ آبادان تهیه کنیم. بعد، با اندازه نمونه کافی افرادی را به‌طور تصادفی انتخاب کنیم و از هر دانشآموز بپرسیم در اوقات فراغت خود چه فعالیت‌هایی انجام می‌دهد و بهصورت متوسط چند ساعت در هفته به این فعالیت‌ها مشغول است.»



موارد زیر اشکالاتی است که در پیشنهادهای امید و علی وجود دارد. در هر مورد، بنویسید که اشکال مربوط به پیشنهاد علی است یا امید.

الف) کسانی که اوقات فراغتشان را در خانه می‌گذرانند، شانس حضور در نمونه را ندارند.

ب) نوجوانان بازمانده از تحصیل، شانس حضور در نمونه را ندارند.



پ) اگر مثلاً به کتابخانه برویم و از نوجوانان بپرسیم به‌طور متوسط چند ساعت در هفته به این مکان می‌آیند، میانگین داده‌های بدست‌آمده (آماره نمونه) بزرگ‌تر از میانگین آن در جامعه آماری (پarameter) جامعه می‌شود؛ چون نوجوانانی که اصلاً به کتابخانه نمی‌روند، در نظر گرفته نشده‌اند.

دو اشکال دیگر را که به نمونه‌گیری علی وارد است، مطرح کنید.

۳. برای بررسی وضعیت اجتماعی – اقتصادی خانوارهای یک شهر در کدام شیوه نمونه‌گیری، همه قشرهای جامعه شانس حضور ندارند؟ چرا؟

الف) انتخاب خانوارها براساس رقم اول تلفن خانه‌ها

ب) انتخاب خانوارها براساس رقم آخر تلفن خانه‌ها.



گام ۳ (گردآوری و پاک‌سازی داده‌ها)

در هر مطالعه ممکن است در مرحله اندازه‌گیری، گردآوری یا ثبت داده‌ها و یا وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار اشتباہی رخ دهد. با بررسی دقیق داده‌ها می‌توان برخی از این اشتباہها را تصحیح کرد.

کار در کلاس

آنچه در جدول زیر نشان داده شده، بخشی از داده‌های گردآوری شده در یک پروژه دانش آموزی پیش از برطرف کردن اشتباهات است.

چون برخی نرم افزارها نمی‌توانند داده‌های غیر عددی را تحلیل کنند، برای متغیرهای کیفی کُد تعیین می‌کنیم؛ مثلاً در این داده‌ها برای جنسیت دختر کد ۱ و برای پسر کد ۲ تعیین شده است. در متغیر «ورزش مورد علاقه» نیز برای فوتبال، والیبال، بسکتبال و شنا به ترتیب کدهای ۱، ۲، ۳ و ۴ تعیین شده است.

در این داده‌ها هر سطر نشان دهنده یک فرد و هر ستون نشان دهنده یک متغیر است.

| | شماره دانش آموز | سن | جنسیت | ورزش مورد علاقه | متوجه مطالعه آزاد در هفته | متوسط ساعت مطالعه آزاد در هفته | نمره ادبیات |
|----|-----------------|----|-------|-----------------|---------------------------|--------------------------------|-------------|
| ۱ | ۱۴ | ۱۴ | ۱ | ۱ | ۲ | ۱۵ | |
| ۲ | ۵ | ۱۵ | ۲ | ۱ | ۰ | ۱۴ | |
| ۳ | ۱ | ۱۴ | ۱ | ۲ | ۳ | ۱۵ | |
| ۴ | ۴۵ | ۱۵ | ۱ | ۲۲ | ۵ | + | |
| ۵ | ۲ | ۵۱ | ۲ | ۲ | ۴۴ | ۱۷ | |
| ۶ | ۱۷ | ۱۴ | ۲ | ۳ | ۶ | ۱۸ | |
| ۷ | ۱۹ | ۱۵ | ۳ | ۷ | ۱۹ | | |
| ۸ | ۳۴ | ۱۴ | ۲ | ۴ | ۴ | ۱۷ | |
| ۹ | ۵۲ | ۱۴ | ۱ | ۳ | ۳ | ۱۵ | |
| ۱۰ | ۱۲ | ۱۴ | ۱ | ۲ | ۰ | ۱۰ | |
| ۱۱ | ۷ | ۱۴ | ۱ | ۲ | ۱ | ۱۲ | |
| ۱۲ | ۳۵ | ۱۴ | ۲ | ۱ | ۲ | ۱۴ | |
| ۱۳ | ۲۶ | ۱۵ | ۱ | ۴ | ۷ | ۲۰ | |
| ۱۴ | ۲۱ | ۱۳ | ۲ | ۱ | ۵ | ۱۸ | |

با توجه به جدول داده‌ها

(الف) در متغیر سن، کدام داده احتمالاً اشتباه تایپ شده است؟ چگونه می‌توانستیم با مرتب کردن داده‌ها در نرم افزار، این داده را از میان تعداد بسیار زیادی سطر پیدا کنیم؟

(ب) در داده‌های مربوط به کدام دانش آموز به دلیل جا افتادن کد جنسیت، داده‌های متغیرهای بعدی (ورزش مورد علاقه، متوسط ساعت مطالعه آزاد و نمره ادبیات) به سمت چپ جایه‌جا شده‌اند؟ ورزش مورد علاقه این دانش آموز چیست؛ نمره ادبیات او چند است.

(پ) در متغیر «ورزش مورد علاقه» کدام عدد به اشتباه نوشته شده است؟

(ت) در متغیر «متوسط ساعت مطالعه آزاد در هفته» کدام عدد با الگوی داده‌های دیگر تفاوت دارد؟ آیا می‌توانیم این عدد را بدون بررسی، حذف یا اصلاح کنیم؟

(ث) در متغیر «نمره ادبیات» داده‌های مربوط به کدام دانش آموز با واحد اندازه‌گیری متفاوتی ثبت شده است؟ چگونه می‌توانستیم از این اتفاق جلوگیری کنیم؟

بحث و گفت و گو

اگر دانش‌آموزی در روز برگزاری آزمون ادبیات غایب باشد چه باید کرد؟ اگر بخواهیم نمره‌ای برای او در نظر بگیریم، این کار را چگونه انجام دهیم؟ در این باره چه پیشنهادی دارید؟ آیا با بررسی تمامی موارد ممکن می‌توانیم مطمئن باشیم که داده‌ها کاملاً درست ثبت شده‌اند؟ چرا؟

۴ گام (تحلیل داده‌ها)

در این مرحله، داده‌ها را تحلیل می‌کنیم و نتایج را ارائه می‌دهیم. منظور از تحلیل داده‌ها در واقع صرفاً گزارش معیارها و ارائه نمودارها و دیگر نتایج آماری است. تفسیر این نتایج و نتیجه‌گیری از آنها در گام بعد انجام خواهد شد.

یادآوری: همان‌طور که می‌دانید، برای توصیف داده‌های کمی باید هم معیار گرایش به مرکز و هم معیار پراکندگی گزارش شود. معیارهای گرایش به مرکز مانند میانگین و میانه به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها در کجا متتمرکزند و معیارهای پراکندگی به ما کمک می‌کنند بدانیم داده‌ها چگونه متراکم یا پراکنده شده‌اند. به یاد دارید که اگر داده دورافتاده داشته باشیم، میانگین و انحراف معیار، معیارهای مناسبی برای توصیف داده‌ها نخواهند بود. چرا؟

کار در کلاس

با توجه به داده‌ها جدول زیر را کامل کنید.

| متغیر | داده‌ها | معیارهای گرایش به مرکز | IQR | SD | انحراف معیار |
|-----------------------|-------------------------------------|------------------------|-------|-----|--------------|
| سن (سال) | ۱۷ ۱۸ ۱۶ ۱۷ ۱۵ ۱۹ ۱۵ ۱۶ ۱۷ ۱۸ ۱۵ ۱۹ | میانه | میانه | IQR | SD |
| میزان تماشای تلویزیون | ۴ ۲۹ ۴ ۶ ۷ ۶/۵ ۸ ۶ ۳۰ ۴ ۵ | | | | |

راهنمای جدول: میزان تماشای تلویزیون: متوسط ساعت‌های تماشای تلویزیون در هفته؛ IQR^* : دامنه میان چارکی؛ SD^{**} : انحراف معیار.

با توجه به جدول بالا، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده‌های متغیر «سن» مناسب‌اند؟ چرا؟

* IQR: Interquartile Range

** SD: Standard Deviation

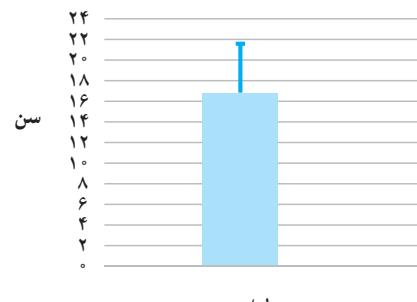
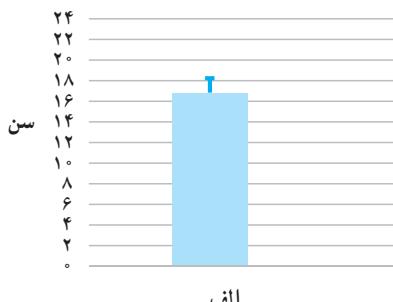
ب) کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی، برای توصیف داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» مناسب‌اند؟ چرا؟

پ) انحراف کدام داده‌ها از میانگین، باعث بزرگ شدن انحراف معیار متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» شده است؟ چگونه؟

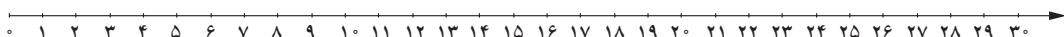
ت) اگر برای توصیف داده‌های متغیر «ساعت‌های تماشای تلویزیون» فقط میانگین گزارش می‌شد، خوانندگانی که به داده‌های خام دسترسی نداشتند چگونه گمراه می‌شدند؟

در داده‌هایی که میانگین و انحراف معیار شاخص‌های مناسبی برای توصیف هستند، می‌توانیم از نموداری استفاده کنیم که بلندی مستطیل آن نشان‌دهنده میانگین باشد و میله خطای آن، به اندازه انحراف معیار، روی مستطیل بالا آمده باشد.

ث) با توجه به داده‌های جدول کار در کلاس در صفحه قبل، کدامیک از نمودارهای زیر نشان‌دهنده میانگین و انحراف معیار سن است؟
نمودار الف یا ب؟



اگر داده‌های دورافتاده داشته باشیم، نمی‌توانیم فقط به نمایش میانگین و انحراف معیار بسته کنیم؛ زیرا گزارش میانگین می‌تواند گمراه‌کننده باشد. در این‌گونه موارد باید از نمودار جعبه‌ای استفاده کنیم. برای داده‌های «ساعت‌های تماشای تلویزیون» در مثال بالا، با استفاده از مقدار چارک‌های اول، دوم (میانه) و سوم، ابعاد جعبه (به ترتیب ابتداء، خط میانی و انتهای) را روی محور زیر مشخص کنید. سپس، با توجه به کوچکترین و بزرگ‌ترین داده‌ها، نمودار جعبه‌ای را رسم کنید.



الف) کدام نمودار بهتر نشان می‌دهد که داده‌ها کجا متراکم‌تر و کجا پراکنده‌ترند : نمودار نمایش‌دهنده میانگین و انحراف معیار یا نمودار جعبه‌ای؟

ب) اگر از الگوی توزیع داده‌ها وجود داده‌های دورافتاده اطلاعی نداشته باشیم، کدام نمودار برای نمایش اطلاعات متغیرهای کمی مطمئن‌تر است؟

کار در کلاس

دو شرکت به نرگس پیشنهاد کار داده اند که یکی از آنها ۳۰ و دیگری ۳۱ کارمند دارد. میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت اول، تقریباً ۱۶ میلیون تومان و میانگین حقوق ماهیانه کارمندان شرکت دوم تقریباً ۴ میلیون تومان است. او برای انتخاب یکی از این دو شرکت، از اعظم و مریم نظرخواهی می کند.

اعظم می گوید: «شرکت دوم را انتخاب کن؛ چون به طور متوسط هر ماه ۴ میلیون تومان درآمد خواهی داشت.» مریم می گوید «به نظر من این اطلاعات کافی نیست. گزارش معیار گرایش به مرکز بدون معیار پراکنده‌گی چه فایده‌ای دارد؟ آنها تصمیم می‌گیرند شرایط را کمی پیشتر بررسی کنند پس، در هر شرکت چند نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنند و اطلاعات زیر را گردآوری می‌کنند.

| | حقوق کارمندان | | | | | | | | |
|----------|---------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| شرکت اول | ۱ | ۱.۵ | ۱.۲ | ۱.۷ | ۱.۴ | ۱.۹ | ۳ | ۱.۱ | ۱.۸ |
| شرکت دوم | ۰.۷ | ۱ | ۸ | ۱۲۱ | ۰.۸ | ۱.۶ | ۱۰۱ | ۰.۹ | ۰.۸ |

الف) با استفاده از داده‌های جدول بالا، نمودار جعبه‌ای حقوق ماهیانه کارمندان این دو شرکت را روی یک محور رسم کنید.



ب) با توجه به نمودارهای قسمت الف، درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- حقوق تقریباً ۵٪ کارمندان شرکت دوم کمتر از کمترین حقوق کارمندان شرکت اول است.
- اگر نرگس سطح تحصیلات و تجربه متوسطی داشته باشد و این دو شرکت افراد را براساس شایستگی‌هایشان انتخاب کنند، شرکت اول برای او مناسب است.
- در شرکت دوم، میانگین، معیار گرایش به مرکز مناسبی است.

کار در کلاس

دو مدرسه متوسطه دوم، که تعداد دانشآموزانشان تقریباً برابر بود، در سال گذشته با تغییر برنامه‌ها و کادر آموزشی شان، وضعیت قبولی دانشآموزان خود را در ۱۵ دانشگاه برتر کشور بهمود دادند. مدرسه اول قبولی‌هایش ۲۰٪ درصد افزایش داشت و مدرسه دوم ۲٪ درصد. فرض می‌کنیم اولیا برای انتخاب مدرسه فرزندان خود محدودیتی ندارند.

الف) در این مسئله، متغیر «قبولی در ۱۵ دانشگاه برتر کشور» (قبول شدن / قبول نشدن) چه نوع متغیری است؟ کمی یا کیفی؟

ب) با توجه به این اطلاعات، کدام مدرسه را به اولیا پیشنهاد می‌کنید؟

پ) افزایش ۲۰٪ درصدی و ۲٪ درصد به چه معناست؟ توضیح دهید.

ت) فرض کنید در مدرسه اول، تعداد قبولی ها قبلاً ۱ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۳ نفر شده است (۲۰٪ افزایش) و در مدرسه دوم، تعداد قبولی ها ۷ نفر بوده و با تغییر کادر آموزشی ۸۴ نفر شده است (۲۰٪ افزایش). اکنون کدام مدرسه را پیشنهاد می کنید؟

ث) در گزارش متغیرهای کیفی، ارائه درصد بدون مشخص کردن تعداد، چگونه می تواند گمراه کننده باشد؟

برای توصیف داده های کیفی (اسمی یا ترتیبی) گزارش درصد باید همیشه با گزارش تعداد همراه باشد.

گام ۵ (بحث و نتیجه گیری)

پس از تحلیل داده ها، باید بتوانیم با تفسیر نتایج، پاسخی برای مسئله اصلی پیدا کنیم. در تفسیر نتایج، توجه به محدودیت های مطالعه ای که انجام داده ایم بسیار مهم است. روش کار و محدودیت های آن باید چنان صادقانه گزارش شود که اگر افراد دیگری تصمیم به انجام دادن مطالعه ای در همان زمینه داشتند، با مشکلاتی مشابه مواجه نشوند. پیشنهادهای ما می تواند به این افراد کمک کند. اگر ضمن توجه به تمامی نکات نمونه گیری، داده ها را با روش های مناسبی تحلیل کرده باشیم، در بهترین حالت می توانیم نتایج را فقط به جامعه آماری مورد بررسی تعیین دهیم؛ توجه کنید که اگر تمامی افراد جامعه آماری را بررسی نکردیم، نتایج ما قطعی نیستند؛ چون در نمونه گیری دیگری از همین جامعه، افراد دیگری در نمونه قرار می گیرند و نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد. (از جامعه ای با اندازه N به چند طریق می توانیم نمونه هایی با اندازه n داشته باشیم؟)

یکپارچگی چرخه آمار در حل مسائل

همان طور که دیدید، در تمامی گام های حل مسئله مرتبط با آمار، لازم است مسئله مورد بررسی، متغیرها و عوامل مرتبط با آنها را خوب بشناسیم. این امر، بدون کار گروهی و همکاری کارشناسان زمینه پژوهش مورد بررسی، ممکن نیست. مثلاً اگر آمارگیران از اهداف کلی مطالعه باخبر نباشند یا فردی که داده ها را تحلیل می کند، ویژگی های جامعه آماری یا موضوع مورد بررسی را به خوبی

شنناسد، حتی اگر هر فرد به صورت جداگانه کار خود را خیلی خوب انجام دهد، نتیجه نهایی لزوماً مطلوب نخواهد بود. باید توجه داشته باشیم که اگر مطالعه در منطقه ای انجام می شود که ویژگی های آن را به خوبی نمی شناسیم، در تمام گام ها به دانش اهالی منطقه اولویت دهیم. کیفیت اجرای هر یک از گام های چرخه آمار، گام های دیگر را به شدت تحت تأثیر قرار می دهد. مثلاً برای نقد معیارهای گزارش شده در یک مطالعه، نه تنها می توانیم چرایی گزارش میانگین یا میانه و یا گزارش نشدن شاخص پراکنده را نقد کنیم، بلکه باید درباره چگونگی نمونه گیری، شیوه اندازه گیری، نوع ورود داده ها و تمامی موارد گام های دیگر چرخه نیز تردید و پرسش داشته باشیم.



کار در کلاس



۱. برای احداث یک استخر در حاشیه یک کلانشهر، محل مناسبی انتخاب، و با همکاری گروهی متخصص، استخری مجهز و اصولی در آن محل ساخته شد. پس از بهره‌برداری از استخر، مشاهده شد که اغلب اوقات افراد مسن زیادی، که شناگر نبودند، به توصیه پزشکی در قسمت کم عمق در حال راه رفتن در آب اند و در قسمت عمیق گاهی فقط چند نفر شنا می‌کنند.

الف) آگاهی از میانگین سنی افراد منطقه احداث استخر، چگونه می‌توانست به اجرای این پروژه کمک کند؟

ب) چه کسانی می‌توانستند پیش از احداث این استخر، دربارهٔ فراوانی افرادی که در آن منطقه شناگر بودند، اطلاع بدene؟

پ) چگونه مشورت با افراد بومی دربارهٔ اطلاعات قسمت الف و ب می‌توانست به متخصصان کمک کند که ابعاد قسمت کم عمق و عمیق استخر را متناسب با نیاز منطقه طراحی کنند؟

۲. هر یک از موارد زیر اجرای نادرست کدام گام است و بر کدام گام‌های دیگر اثر می‌گذارد؟ چگونه؟

الف) مسئله به صورتی بیان شده است که اجرا کنندگان برداشت‌های متفاوتی از اهداف پژوهش دارند.

ب) اندازه‌گیری وزن افراد نمونه با دو واحد متفاوت (کیلوگرم و پوند) انجام شده است.

پ) تمامی داده‌های دورافتاده حذف شده‌اند.



ت) در پژوهشی با موضوع «بررسی قدمت بنای مسکونی چند روستا»، مجریان پژوهش جلساتی را با حضور کارشناسان برگزار می‌کنند و پس از تصمیم‌گیری دربارهٔ طراحی و برنامه‌ریزی پژوهه، برای گردآوری داده‌ها چند نفر را استخدام می‌کنند. آمارگیرها بدون اطلاع از چگونگی شکل‌گیری مسئله و اهداف این پژوهش، برای پر کردن پرسش‌نامه‌ها به منازل مختلف مراجعه می‌کنند. هنگام وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار، مشاهده می‌شود که در چندین پرسش‌نامه در مقابل متغیر «سن بنا» نوشته‌اند: «فوت شده است».

ث) پس از گردآوری و تحلیل داده‌ها به شیوه‌ای که پیش‌تر در گام «طرح و برنامه‌ریزی» به تأیید رسیده بود، نتایج مورد انتظار به‌دست نیامد. به همین سبب، معیارهای دیگری برای گزارش نتایج انتخاب شده است.

ج) نتایج را فقط افراد متخصص آمار تفسیر کرده‌اند.

خواندنی

پادشاهی پسر خود را به جماعتی اهل هنر سپرده بود تا او را از علوم نجوم و رمل و غیره آموخته بودند و استاد تمام گشت با کمال کودکی. روزی پادشاه انگشت‌تری در مُشت گرفت؛ فرزند خود را امتحان کرد که بیا بگو در مُشت چه دارم؟ پسر گفت: «آنچه داری گرد است و زرد است و مُجَوَّف (میان‌تهی) است.» پادشاه گفت: «چون شان‌های راست دادی، پس حکم کن که آن چه چیزی باشد.» پسر گفت: «باید که غربیل (غربال، الک) باشد.» پادشاه گفت: «از قوت تحصیل و دانش این چندین شان‌های دقیق دادی که عقول در آن حیران شوند اما ندانستی که غربیل در مشت نگنجد؟» برگرفته از فیه ما فیه — مولانا جلال الدین محمد

تمرین

۱. به نظر می‌رسد کودکانی که زبان مادری‌شان فارسی نیست، در دوره دبستان مشکلات بیشتری برای یادگیری مفاهیم درسی دارند. با انتخاب یک جامعه‌آماری محدود (از نظر پایه تحصیلی، جنسیت، منطقه، زبان مادری و...) و انتخاب متغیر مناسب، این مسئله را به صورت دقیق و شفاف بیان کنید.

۲. با توجه به تأثیر شیوه‌های مختلف حمل و نقل، بر محیط‌زیست، می‌خواهیم در یک کلاس ۲۸ نفره با انتخاب تصادفی ۹ نفر از داش آموزان، از آنها پرسیم در هفته گذشته، بیشتر به کدام یک از شیوه‌های زیر به مدرسه آمده‌اند؟

۱— پیاده یا با دوچرخه

۲— با وسایل حمل و نقل عمومی

۳— با سرویس مدرسه یا خودروی شخصی.

الف) در این مطالعه، جامعه‌آماری، نمونه‌آماری، اندازه جامعه و اندازه نمونه را مشخص کنید.

ب) داده‌های این مطالعه را با چه روشی می‌توان گردآوری کرد؟ چه مشکلاتی ممکن است در گردآوری این داده‌ها رخ دهد؟

پ) متغیر تصادفی مورد بررسی این مطالعه چیست؟ نوع متغیر (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی – اسمی/ترتیبی) آن را مشخص کنید.

ت) چه نمودارها و آماره‌هایی برای گزارش نتایج این مطالعه مناسب‌اند؟

ث) آیا می‌توانیم این نتایج را به شیوه رفت و آمد داش آموزان این کلاس در کل سال تحصیلی تعمیم دهیم (مثالاً به فصل‌های مختلف یا زمان برگزاری آزمون‌های پایان نیم‌سال)؟ توضیح دهید.

ج) اگر ۹ نفر دیگر از این کلاس را به طور تصادفی انتخاب می‌کردیم، آیا لزوماً نتایج مشابهی حاصل می‌شد؟ توضیح دهید.

۳. در هریک از موارد زیر، علت عدم تناسب جامعه‌آماری با نمونه‌های انتخاب شده را توضیح دهید. برای بهبود نمونه‌گیری چه پیشنهادی دارید؟ انتخاب نادرست نمونه در هریک از موارد چگونه بر نتایج تأثیر می‌گذارد؟

الف) مسئله: بررسی میزان رضایت شغلی در کارمندان یک کارگاه شبانه‌روزی

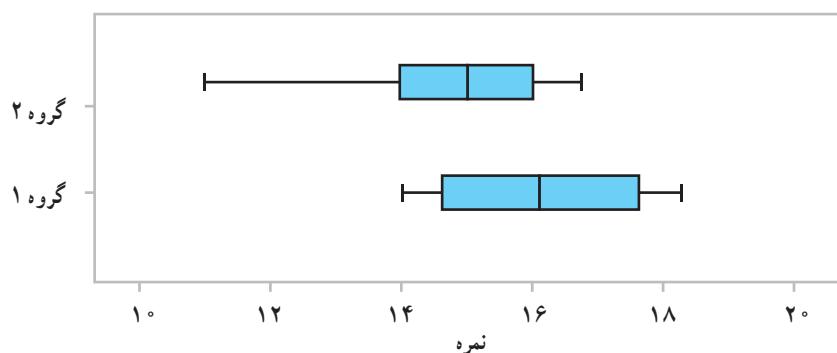
نمونه: انتخاب تصادفی تعدادی از مدیران ارشد شیفت روز

ب) مسئله : نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایتشان از برنامه‌های کودک تلویزیون
نمونه : انتخاب تصادفی برخی منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح

پ) مسئله : نظرسنجی از دانشآموزان پایه دوازدهم منطقه ۲ بوشهر درباره اینکه به طور متوسط چند ساعت از روز را به انجام
دادن تکالیف مدرسه اختصاص می‌دهند.

نمونه : دختران پایه دوازدهم یک مدرسه از این منطقه که به صورت داوطلبانه در این مطالعه مشارکت کرده‌اند.

۴. «مطالعات دانشمندان علوم اعصاب نشان می‌دهد که مغز انسان برای انجام دادن هم‌زمان چند فعالیت ساخته شده است و هر بار که ما گمان می‌کنیم مشغول انجام دادن چند کار به صورت هم‌زمان هستیم، درواقع مغزمان دارد با سرعت از کاری به کار دیگر می‌پردازد. مغز انسان تشنۀ خبرها و اتفاقات جدید است. وقتی مشغول مطالعه و یادگیری هستیم و ناگهان صدای دریافت یک پیام را از تلفن همراه خود می‌شنویم، مغز ما، که بی‌تابانه منتظر کشف آن اطلاع جدید است، دیگر روی یک کار متمرکز نیست. این مطالعات نشان می‌دهد که مثلاً اگر دانشآموزی هنگام مطالعه و یادگیری، هم‌زمان تلویزیون تماشا کند یا گفت‌وگویی را در یک شبکه اجتماعی دنبال کند، مطالب درسی به جای اینکه به قسمت حقایق و ایده‌ها برود، به قسمت مهارت‌ها فرستاده می‌شود.» سعید و سهراب پس از خواندن این مطلب در نشریه مدرسه تصمیم گرفتند نمره عملکرد تحصیلی ۲۵ دانشآموز پایه دوازدهم مدرسه را که هنگام مطالعه، تلفن همراه خود را در حالت بی‌صدا قرار می‌دهند (گروه یک)، با ۲۵ دانشآموز پایه دوازدهم دیگر که این کار را انجام نمی‌دهند (گروه دو) مقایسه کنند. نتایج این مطالعه به این شرح است:



الف) از مقایسه میانه گروه یک با چارک سوم گروه دو چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) پراکندگی دو گروه را با استفاده از دامنه تغییرات و دامنه میان چارک مقایسه کنید.

پ) از مقایسه کمینه گروه یک با چارک اول گروه دوم چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ت) در کدام گروه گزارش میانگین و انحراف معیار می‌تواند گمراه کننده باشد؟

ث) در کدام گروه مقدار میانگین و میانه به هم تزدیک ترند؟

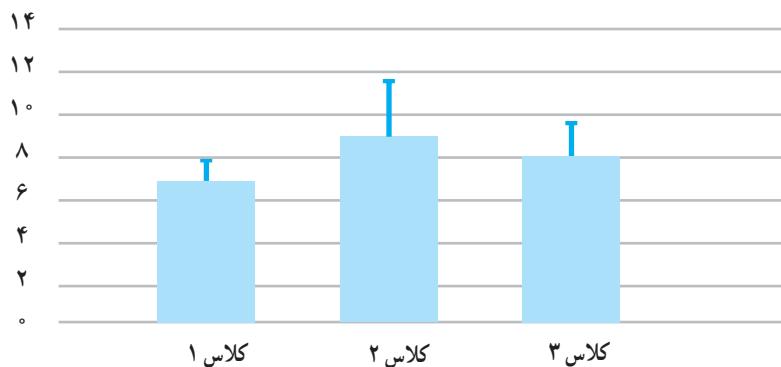
ج) نتایج این مطالعه را به چه جامعه‌ای می‌توان تعمیم داد؟

۵. در یک نظرسنجی، از ۱۵ دانشآموز علوم انسانی پایه یازدهم یک مدرسه پرسیده‌ایم که به نظر آنها چند ساعت آموزشی در ماه برای برگزاری جلسات نقد کتاب یا فیلم مناسب است. داده‌های گردآوری شده به این شرح است:

۱۶ ۱۲ ۱۰ ۱۳ ۱۲ ۱۰ ۲۰ ۲۲ ۱۸ ۱۶ ۶ ۴ ۰

- الف) این داده‌ها را طوری تغییر دهید که میانگین و انحراف معیار بیشتر شود اما میانه و چارک اول و چارک سوم تغییر نکند.
- ب) فرض کنید می‌خواهیم دو نفر دیگر به این نمونه اضافه کنیم. داده‌های این دو نفر را طوری انتخاب کنید که میانگین و میانه تغییر نکند.

۶. با توجه به تأثیر کمیت و کیفیت خواب بر یادگیری، ندا و آوا در مطالعه‌ای با بررسی تمامی دانشآموزان سه کلاس پایه دهم، میانگین میزان خواب این دانشآموزان را در هفته گذشته بر حسب ساعت پرسیدند و ثبت کردند. آنها پس از گردآوری داده‌ها و بررسی درستی آن را به صورت نمودارهای زیر نمایش دادند. (در این نمودارها بلندی مستطیل، نشان‌دهنده میانگین و میله خطأ نشان‌دهنده انحراف معیار است).



الف) چه عواملی ممکن است هنگام گردآوری داده‌ها نتایج را از واقعیت دور کند؟ (هنگامی که دانشآموزان راجع به میانگین ساعت خوابشان در هفته گذشته می‌پرسیم آیا آن‌ها می‌توانند به درستی به یاد آورند که هر شب چند ساعت خوابیده‌اند تا بتوانند میانگین را به درستی اعلام کنند؛ برای حل این مشکل چه راهکاری پیشنهاد می‌کنید؟)

- ب) نوع (کمی/کیفی) و مقیاس اندازه‌گیری (فاصله‌ای/نسبتی – اسمی/ترتیبی) متغیر مورد بررسی در این مطالعه را مشخص کنید.
- پ) با استفاده از اطلاعات نمودارها، نتایج را به صورت تقریبی در جدول زیر بنویسید.

| | کلاس ۱ | کلاس ۲ | کلاس ۳ |
|--------------|--------|--------|--------|
| میانگین | | | |
| انحراف معیار | | | |

ت) چه عواملی می‌تواند بر نتایج این مطالعه تأثیر بگذارد؟ چگونه می‌توانیم با بیان مسئله‌ای جدید، پاسخ دقیق‌تری برای این مسئله پیدا کنیم؟

ث) چه کسانی می‌توانند در اجرای بهتر این مطالعه به ما کمک کنند؟ چگونه؟

۷. مدرسه‌ای برای ترویج فرهنگ کتابخوانی، از دو سال پیش به غیر از دانشآموزان مدرسه، از خارج از مدرسه نیز عضو می‌پنیرد. نمودار میله‌ای زیر نشان‌دهنده روند تغییرات فراوانی اعضای جدید کتابخانه در دو گروه مذکور است.



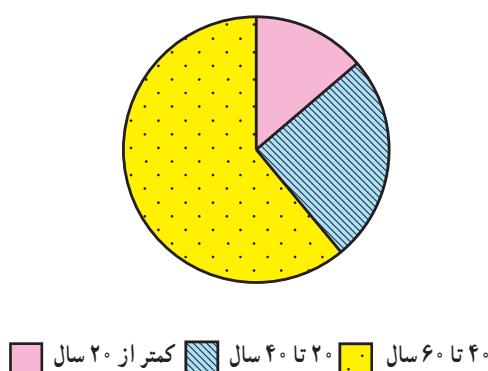
الف) سال گذشته چند نفر از خارج مدرسه عضو کتابخانه شده‌اند؟

ب) با توجه به روند این تغییرات، پیش‌بینی می‌کنید سال آینده چه تعداد از دانشآموزان این مدرسه عضو کتابخانه شوند؟

پ) با استفاده از نمودارهای میله‌ای داده شده، برای هریک از این سه سال یک نمودار دایره‌ای جداگانه رسم کنید.

ت) به نظر شما چه عواملی موجب این روند تغییرات شده است؟

۸. فراوانی بازدیدکنندگان از یک سالن نمایش در گروه‌های سنی مختلف در نمودار دایره‌ای زیر نمایش داده شده است. (در این نمودار، ۵۴ درجه مربوط به گروه سنی کمتر از ۲۰ سال، ۹۰ درجه مربوط به گروه سنی ۲۰ تا ۴۰ سال و بقیه مربوط به گروه سنی ۴۰ تا ۶۰ سال است.)



- الف) با توجه به این نمودار، چند درصد افراد بازدیدکننده بین ۴۰ تا ۶۰ سال سن دارند؟
- ب) مسئول فروش بلیت این سالن نمایش پس از مشاهده نتایج، آن را غیرواقعی دانست و گفت: «بیشتر بازدیدکنندگان این سالن کمتر از ۴۰ سال دارند.» از موارد زیر کدام می‌توانند نتایج این مطالعه را بدین شکل از واقعیت دور کرده باشد؟ توضیح دهید.

- بسیاری از افراد کمتر از چهل سال تمايلی به پاسخ‌گویی به سؤالات پرسشگر نداشته‌اند.
- گردآوری داده‌ها در ساعت‌های اداری انجام شده است و بازنیستگان بیشتری در نمونه قرار گرفته‌اند.
- هنگام گردآوری داده‌ها، دانشآموزان بسیاری از طرف مدرسه برای بازدید حضور داشته‌اند.

۹. جدول زیر نشان‌دهنده تعداد تصادف خودروها و سرعت حرکت آنها در زمان تصادف است.

| (کیلومتر در ساعت) سرعت | ۱۰ | ۱۵ | ۲۰ | ۲۵ | ۳۰ | ۳۵ | ۴۰ | ۴۵ | ۵۰ | ۵۵ | ۶۰ | ۶۵ | ۷۰ |
|---------------------------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|----|----|----|----|----|
| تعداد خودروهای تصادف کرده | ۴۰ | ۱۳۰ | ۲۱۰ | ۲۵۰ | ۳۵۰ | ۲۴۰ | ۱۵۰ | ۷۰ | ۴۰ | ۲۰ | ۲۰ | ۱۰ | ۱۰ |

همان‌طور که دیده می‌شود، تعداد تصادف خودروهایی که سرعتشان بیش از ۹۰ کیلومتر در ساعت بوده، کمتر است. پس:

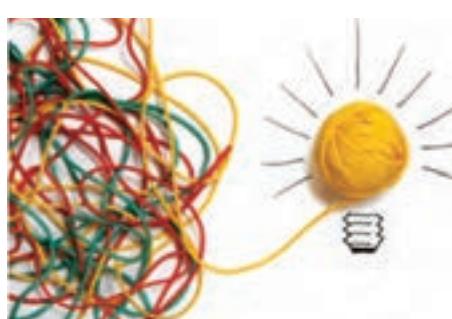
«هرچه سریع‌تر بروید، مطمئن‌تر و امن‌تر است.»

نتیجه‌گیری بالا چه اشکالی دارد؟ چرا این تصور ایجاد شده است؟

پروژه

موضوعی دلخواه یا یکی از موضوعات زیر را انتخاب کنید و با استفاده از گام‌های چرخه آمار، نتایج حاصل را در قالب یک گزارش در کلاس ارائه کنید.

- بررسی ساعات روزانه حضور دانشآموزان در شبکه‌های اجتماعی
- نظرسنجی درباره تغییر قوانین حاکم بر کلاس یا مدرسه
- نظرسنجی درباره کلاس درسی که می‌توانید پرسش‌های خود را آزادانه در آن مطرح کنید.
- نظرسنجی درباره ساعات لازم برای تدریس ریاضی در کلاس دوازدهم انسانی
- بررسی ساعت‌های مطالعه آزاد دانشآموزان و مقایسه آن بین دو گروه از دانشآموزان
- بررسی فعالیت‌های فوق برنامه مورد علاقه دانشآموزان.



فصل ۲- الگوهای خطی

درس ۱

مدل سازی و دنباله

درس ۲

دنباله حسابی

إِنَّ فِي خَلْقِ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ وَاخْتِلَافِ الَّيلِ وَالنَّهَارِ لَآيَاتٍ لِأُولِي الْإِلْبَابِ (آية ۱۹۰ سوره مبارکه آل عمران)
«و مسلماً در آفرینش آسمانها و زمین و آمدورفت شب و روز نشانه های (روشنی) برای خردمندان است»



در جهان اطراف ما الگوهای خطی و غیرخطی بسیاری وجود دارد. این الگوها هم در جانداران و هم در طبیعت قابل مشاهده است.

درس ۱

مدل سازی و دنباله

مدل سازی

در کتاب یازدهم با بررسی مسائلی از دنیای واقعی، مانند محاسبه قبض برق یک خانه یا مدل ریاضی چراغ راهنمایی و رانندگی، با مفهوم مدل سازی آشنا شدیم (رسم نمودار توابع متناظر با مفهوم مطرح شده).

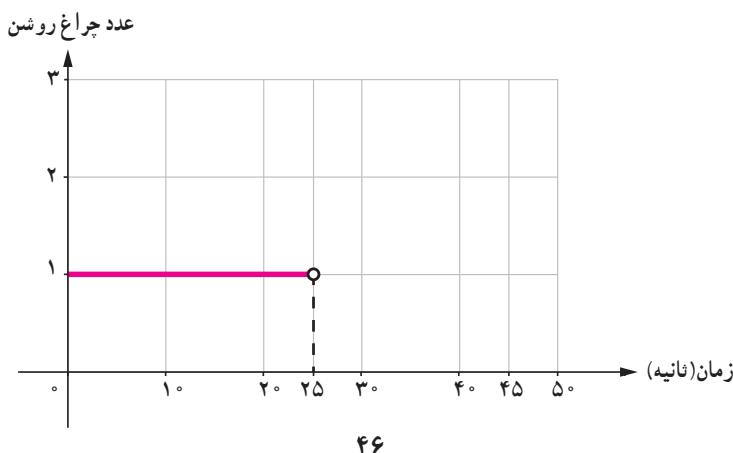
فعالیت



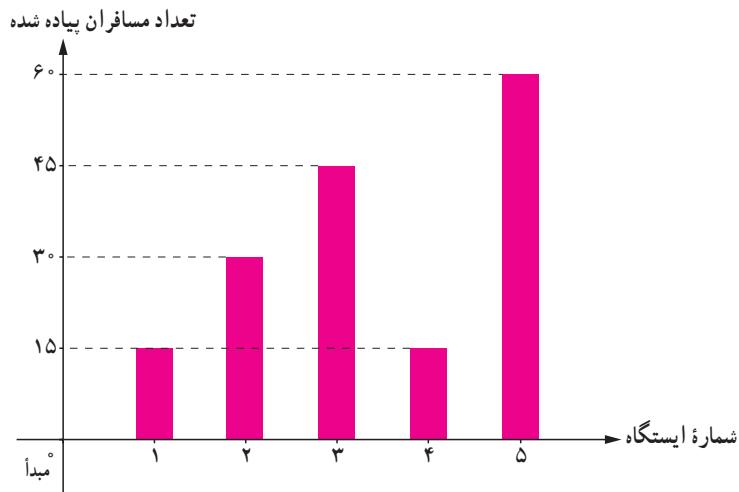
۱. یک چراغ راهنمایی و رانندگی از لحظه شروع به کار ۲۵ ثانیه سبز، ۵ ثانیه زرد و ۱۵ ثانیه قرمز است. مدل ریاضی مسئله را در ۴۵ ثانیه اول شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی به کمک تابع بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

اگر چراغ روشن سبز عدد ۱، زرد عدد ۲ و قرمز عدد ۳ باشد و $f(t)$ عدد چراغ روشن در ثانیه t ام، با توجه به فرض :

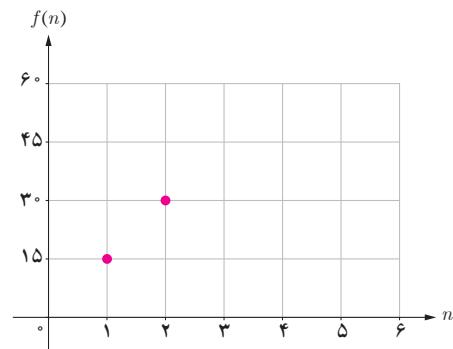
$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 25 \\ \dots & 25 \leq t < 30 \\ 3 & \dots \leq t < \dots \end{cases} \quad D_f = \{t \in \mathbb{R} \mid \dots \leq t < \dots\}, R_f = \{ \quad , \quad , \quad \}$$



۲. نمودار میله‌ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده در هر ایستگاه یک خط مترو در یک مسیر رفت را نشان می‌دهد. اگر n شماره ایستگاه و $f(n)$ تعداد مسافران پیاده شده از نخستین ایستگاه بعد از مبدأ باشد، جدول، نمودار، ضابطه، دامنه و برد تابع را کامل کنید.



| n | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ |
|--------|----|----|-------|-------|-------|
| $f(n)$ | ۱۵ | ۳۰ | | | |



$$f(n) = \begin{cases} \dots & 1 \leq n \leq 3 \\ 15 + 45(n-4) & 4 \leq n \leq 5 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

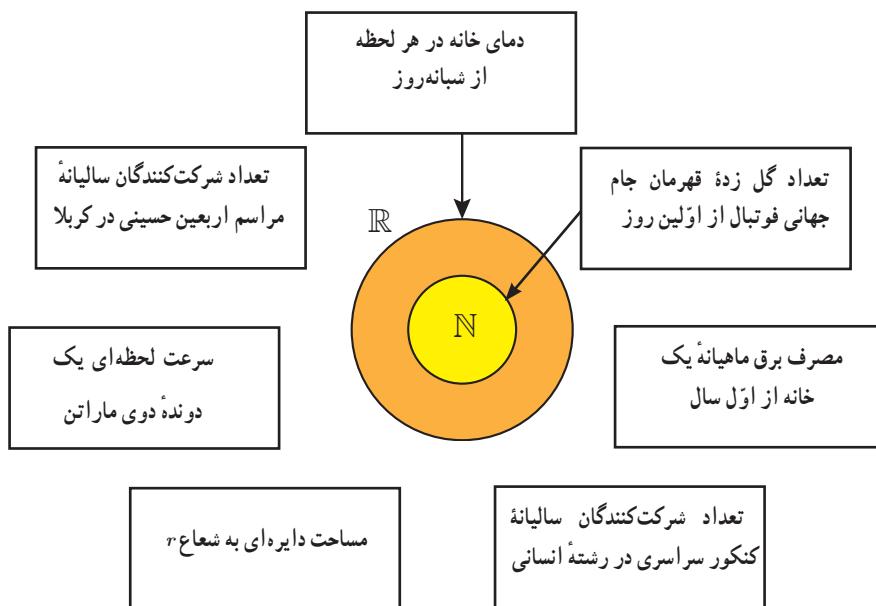
$$D_f = \{n \in \mathbb{N} | \dots \leq n \leq \dots\} \quad R_f = \{ \dots, \dots, \dots \}$$

یکی از تفاوت‌های توابع مطرح شده در فعالیت الف و ب، دامنه آنهاست. با توجه به اینکه در فعالیت اول، دامنه تابع زمان شروع به کار چراغ راهنمایی و رانندگی تا ثانیه ۴۵ ام است و تابع در تمامی این زمان، قابل تعریف است، پس دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی انتخاب شده است.

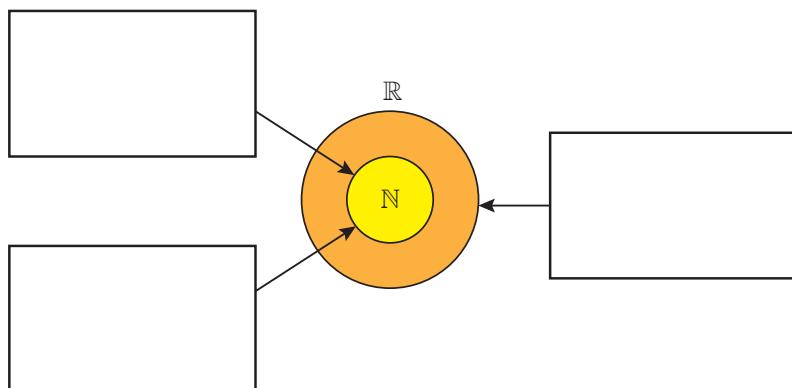
در فعالیت دوم، دامنه تابع بیانگر شماره ایستگاه‌های قطار است؛ زیرا عدد ۱، ایستگاه اول، عدد ۲، ایستگاه دوم و... است. پس، دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد طبیعی است.

کار در کلاس

۱. اگر f تابع مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، مانند نمونه، دامنه هر کدام از مسائل را مشخص کنید.



۲. داخل هر کدام از مستطیل‌های زیر مسئله‌ای را بنویسید که دامنه مدل ریاضی آن مطابق شکل زیر باشد :



در تعیین دامنه تعریف توابعی که پاسخ آنها وابسته به بررسی مسئله در مرحله یا گام اول، دوم، ... و n ام است، از مجموعه اعداد طبیعی استفاده می‌کنیم.

کاربردی دیگر از مجموعه اعداد طبیعی

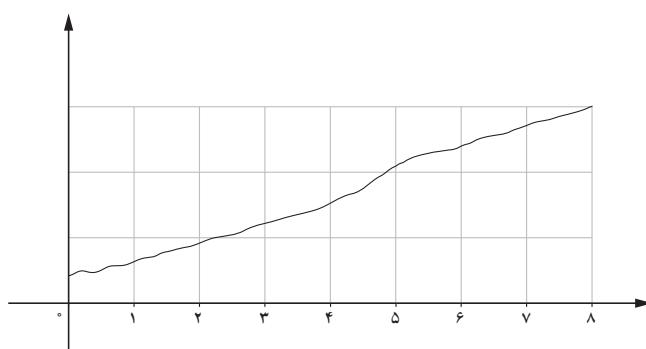
در بسیاری از مسائل واقعی مانند مسائلی که وابسته به زمان‌اند، ممکن است بررسی تابع در هر لحظه از نظر عملی امکان‌پذیر نباشد.

در این حالت، با انتخاب نقاطی با فاصله زمانی یکسان (تشکیل یک سری زمانی) رفتار تابع را به‌طور تقریبی بررسی می‌کنیم.

برای مثال، از لحاظ نظری یک پزشک می‌تواند میزان یک دارو را در بدن بیمار در هر لحظه از شباهنروز اندازه‌گیری کند اما در عمل او با فواصل زمانی یکسان (مثلاً در هر یک ساعت از زمان بستری شدن بیمار) به کمک آزمایش، میزان دارو را در بدن بیمار بررسی می‌کند.

به بیان ریاضی، این پزشک رفتار تابعی را که در مجموعه اعداد حقیقی تعریف شده است، در مجموعه اعداد طبیعی بررسی می‌کند (میزان دارو در اولین آزمایش، دومین آزمایش و...).

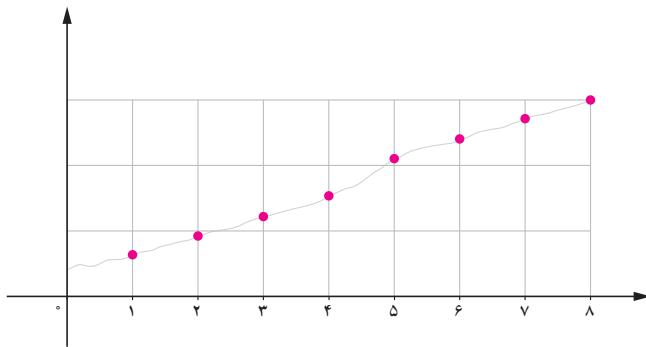
میزان دارو در بدن بیمار (میلی‌گرم)



نمودار واقعی میزان دارو در بدن بیمار در
هشت ساعت اول از زمان بستری شدن

مدت زمان بستری شدن (ساعت)

میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش (میلی‌گرم)



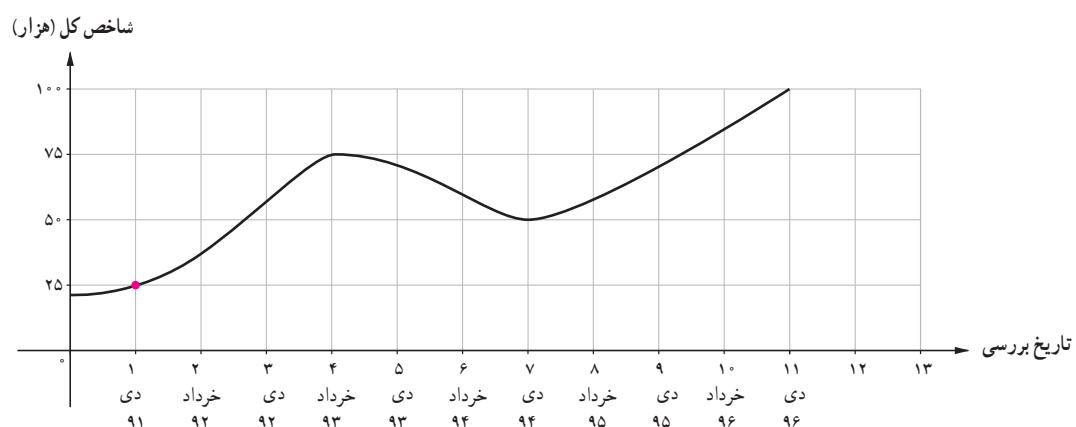
نمودار میزان دارو در بدن بیمار در هر آزمایش

مدت زمان بستری شدن (ساعت)

در فعالیت صفحه بعد، نمونه‌ای دیگر از همین کاربرد را می‌بینیم.

فعالیت

نمودار زیر شاخص قیمت بورس اوراق بهادار تهران^۱ (شاخص کل) را از دی ماه ۱۳۹۱ تا دی ماه ۱۳۹۶ به طور تقریبی نشان می‌دهد:



- (الف) روی نمودار، نقاطی را مشخص کنید که شاخص کل سهام را در تاریخ‌های نوشته شده معلوم کند. در سری زمانی بالا، شاخص کل در چه فاصله‌ای روند کاهشی و در چه فاصله‌ای روند افزایشی داشته است؟ چرا؟
- (ب) اگر به ترتیب دی ۱۳۹۱ را اولین، خرداد ۱۳۹۲ را دومین و ... و دی ۱۳۹۶ را یازدهمین تاریخ مورد بررسی در نظر بگیریم و رابطه میان شاخص کل با زمان را با تابع f نشان دهیم، جدول زیر را کامل کنید.

| n امین تاریخ بررسی | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ | ۵ | ۶ | ۷ | ۸ | ۹ | ۱۰ | ۱۱ |
|--------------------------------|----|-----|-----|---|---|---|---|---|---|----|----|
| $f(n)$ مقدار شاخص کل (هزار) | ۲۵ | ... | ... | | | | | | | | |

- (ج) با توجه به رفتار شاخص کل از دی ماه ۱۳۹۴ تا دی ماه ۱۳۹۶ (زمان تأثیف این پرسش)، اگر رفتار تابع (شاخص کل) به همین صورت ادامه یابد، کدام یک از اعداد زیر تقریب بهتری برای $f(13)$ است؟ چرا؟

$$1) ۸۵,۰۰۰ \quad 2) ۱۰۵,۰۰۰ \quad 3) ۱۱۲,۵۰۰ \quad 4) ۱۰۰,۰۰۰ \quad 5) ۱۲۵,۰۰۰$$

- (د) با مراجعه به پایگاه www.tse.ir مقدار به دست آمده برای دی ماه ۱۳۹۷ را با مقدار واقعی آن مقایسه کنید.

خواندنی

«شاخص بورس تهران امروز با ۱۵۰۰ واحد افزایش به ۸۵۰۰ واحد رسید»، «شاخص بورس امروز ۵۰۰ واحد افت داشت» اینها نمونه جملاتی است که با راه در اخبار اقتصادی شنیده‌ایم، اما این اعداد چه معنایی دارند؟ بازار بورس شاخص‌های مختلفی دارد اما شاید معروف‌ترین آنها – که در اخبار مطرح می‌شود – «شاخص کل» بورس باشد؛ همان شاخصی که نمودار آن در فعالیت پیش بررسی شد. این شاخص از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{\text{ارزش جاری بازار}}{\text{ارزش پایه سهام}} \times 100$$

در این تعریف، سال پایه سال ۱۳۶۹ در نظر گرفته شده است. منظور از ارزش جاری بازار، مجموع حاصل ضرب های «ارزش سهام در همان روز \times تعداد سهام در روز مورد بررسی» برای تک تک شرکت‌هایی است که در بازار بورس قرار دارند. منظور از ارزش پایه سهام، نیز مجموع حاصل ضرب های «ارزش سهام در روز پایه \times تعداد سهام در روز بررسی» است. برای درک بهتر، به مثال زیر توجه کنید.

– فرض کنید در بازار بورس فقط دو شرکت A و B وجود داشته باشند. شاخص سهام کل بازار بورس مثلاً در تاریخ ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ به کمک اطلاعات جدول زیر قابل محاسبه است.

| شرکت | تعداد سهام شرکت در زمان ورود به بورس (۲۰ فوریه ۱۳۶۹) | قیمت سهام شرکت در تاریخ پایه | تعداد سهام شرکت در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ | قیمت سهام در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ |
|------|--|------------------------------|---------------------------------|---------------------------|
| A | ۱۰۰۰ | ۴۵ | ۱۲۰۰ | ۱۲ |
| B | ۵۰۰ | ۳۰ | ۱۵۰۰ | ۱۰ |

$$\text{شاخص سهام کل} = \frac{1200 \times 45 + 1500 \times 30}{1200 \times 45 + 1500 \times 30} \times 100 = \frac{192000}{99000} \times 100 = 193 \times 100 = 193$$

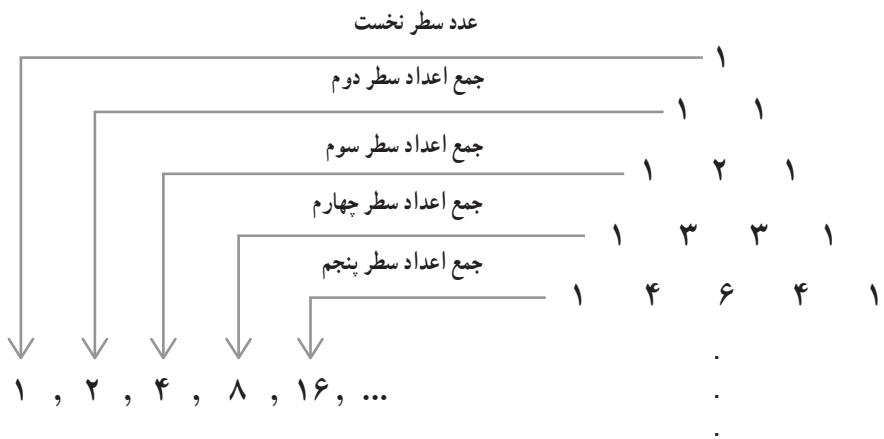
عدد ۱۹۳ به معنای ۱۹۳ برابر شدن ارزش بازار در ۱۲ بهمن ۱۳۹۶ نسبت به ۲۰ فوریه ۱۳۶۹ است. توجه داشته باشید که شاخص کل، واحد ندارد و این عدد به تنها سود یا ضرر را نشان نمی‌دهد بلکه تغییرات آن اهمیت دارد. برای مثال، اگر شما از سهام تمام شرکت‌های بورس یک سهم خریده باشید، در این صورت تغییرات شاخص کل بورس میزان بازدهی شماست؛ یعنی اگر شاخص کل بورس در یک سال از ۲۰۰۰ واحد به ۳۰۰۰ واحد برسد، یعنی ۵۰٪ رشد کند، میانگین بازدهی بورس طی یک سال برای شما ۵٪ بوده است.

۱. فرمول بالا به روش محاسبه «لامپیرز» (Laspeyres) معروف است.

در سال‌های پیش با مفهوم الگو و یافتن جمله a_n یک الگو آشنا شدیم.^۱ عموماً این الگوها را نیز می‌توانیم به کمک تابعی با دامنه اعداد طبیعی مدل‌سازی کنیم.

فعالیت

برای نوشتن جملات یک الگو در مثلث خیام^۲، اعداد هر سطر را به صورت زیر با یکدیگر جمع می‌کنیم:



اگر n شماره هر سطر و a_n (جمله n ام الگو) جمع اعداد هر سطر باشد:

(الف) با محاسبه مجموع اعداد سطر ششم و هفتم مثلث خیام، جملات ششم (a_6) و هفتم (a_7) الگو را مشخص کنید.

(ب) بر اساس رابطه میان a_1 , a_2 و رابطه میان a_2 , a_3 و a_4 و نیز a_3 و a_4 می‌توان مقادیر a_1 و a_5 را مشخص کرد؟ چگونه؟

(ج) آیا به کمک قسمت ب، می‌توانیم رابطه میان هر دو جمله متولی a_n و a_{n+1} را مشخص کنیم؟ آیا با این رابطه فقط جملات الگوی بالا به دست می‌آید؟ چرا؟

(د) رابطه‌ای را که بیانگر ارتباط جملات دنباله با یکدیگر است، رابطه بازگشتی^۳ می‌نامیم. برای دنباله اعداد بالا رابطه‌ای بازگشتی بنویسید که فقط جملات دنباله بالا را مشخص کند.

(ه) رابطه‌ای میان n و a_n بنویسید که جملات الگوی بالا را مشخص کند. ($n \in \mathbb{N}$)

(و) رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت «(د)» چه تفاوتی با ضابطه به دست آمده از قسمت «(ج)» دارد؟

۱. کتاب ریاضی هفتم و هشتم

۲. خواندنی کتاب ریاضی دهم

۳. Recursive Sequence

الگوی اعداد حقیقی، مانند صفحهٔ قبل، را که در آن تعدادی عدد حقیقی پشت‌سر هم قرار دارند دنبالهٔ اعداد حقیقی می‌نامند. جملات دنبالهٔ عموماً به صورت $\dots, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ نشان داده می‌شوند. a_n را جملهٔ $n^{\text{ام}}$ دنبالهٔ می‌نامند که می‌تواند به دو

صورت زیر بیان شود:

الف) رابطه با جملات دیگر دنباله (رابطه بازگشته)

ب) رابطه‌ای بر حسب $n \in \mathbb{N}$ (ضابطهٔ تابعی دنباله).

برای مثال، در دنبالهٔ

$$\begin{array}{ccccccc} 4, & 7, & 10, & 13, & 16, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5, & \dots & \end{array}$$

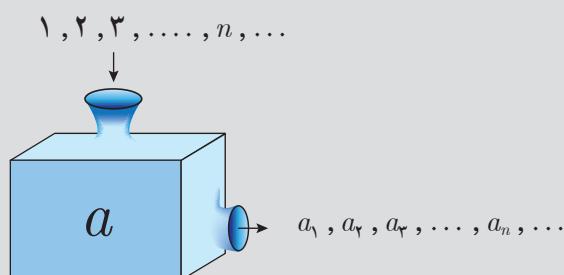
با در نظر گرفتن $a_1 = 4$ ، بقیه جملات دنباله با اضافه کردن عدد ثابت ۳ به جملهٔ پیشین به دست می‌آیند؛ یعنی:

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad (\text{رابطه بازگشته دنباله})$$

و یا می‌توان الگوی جملات دنباله را با ضابطهٔ $a_n = 3n + 1$ نمایش داد که در این رابطه، n عددی طبیعی است و با جایگذاری در تساوی داده شده، مقدار هر جمله به طور مستقیم به دست می‌آید.

تعریف دنباله: همان‌طور که مشاهده شد، اگر a تابعی از $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ باشد اعضای بُرد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جملهٔ اول آن را $a^{(1)}$ ، جملهٔ دوم را $a^{(2)}$ ، جملهٔ سوم را $a^{(3)}$... و جملهٔ $n^{\text{ام}}$ را $a^{(n)}$ در نظر می‌گیریم.

معمولًاً جملات دنباله را به جای $a^{(n)}$ با a_n نشان می‌دهند که آن را جملهٔ $n^{\text{ام}}$ ، جملهٔ عمومی دنباله یا ضابطهٔ دنباله می‌نامند.



کار در کلاس

با توجه به ضابطه دنباله داده شده، جاهای خالی را پر کنید.

| جمله a_n | پنج جمله اول دنباله |
|--------------------------|---|
| $a_n = 3n - 2$ | ۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳ |
| $b_n = n^2 - 1$ | ۰, ۳, ۸, ..., ۲۴ |
| $c_n = \frac{1}{n}$ | ..., $\frac{1}{2}$, ..., ..., ..., ... |
| $d_n = \frac{(-1)^n}{n}$ | -۱, -, $-\frac{1}{3}$, ..., ..., ... |

مثال) برای جملات دنباله زیر :

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳ ... و

الف) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

پاسخ :

الف) برای نوشتن رابطه بازگشتی در اولین دنباله، رابطه میان جملات دنباله را بررسی می کنیم :

$$a_1 = 3 \quad a_2 = 9 = 3a_1 \quad a_3 = 27 = 3 \times 9 = 3^2 \quad a_4 = \dots$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = 3a_n, \quad a_1 = 3$$

یعنی، هر جمله دنباله ۳ برابر جمله پیشین است. بدیهی است که تنها رابطه $a_{n+1} = 3a_n$ جملات دنباله را مشخص نمی کند و حتماً باید یک جمله، مثلاً جمله اول آن یعنی $a_1 = 3$ نوشته شود.

ب) در نوشتن ضابطه تابعی دنباله باید رابطه میان a_n را مشخص کنیم :

$$n=1 \rightarrow a_1 = 3^1 \quad \text{اولین جمله}$$

$$n=2 \rightarrow a_2 = 9 = 3^2 \quad \text{دومین جمله}$$

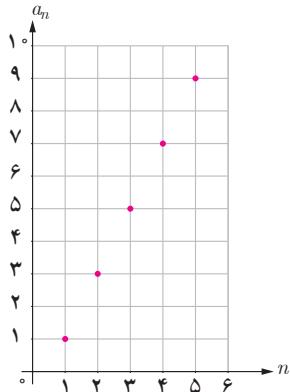
$$n=3 \rightarrow a_3 = 27 = 3^3 \quad \text{سومین جمله}$$

پس، ضابطه تابع به صورت $a_n = 3^n$ به دست می آید.

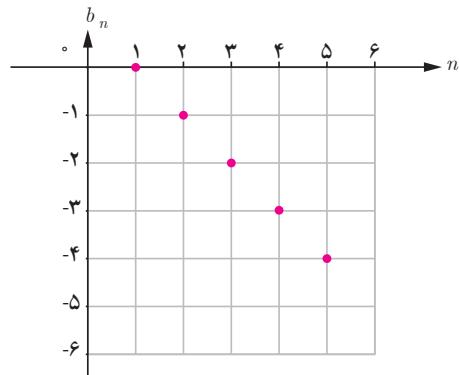
رسم دنباله

با توجه به تعریف دنباله به عنوان تابعی با دامنه اعداد طبیعی، نمودار آنها را نیز می‌توان رسم کرد:

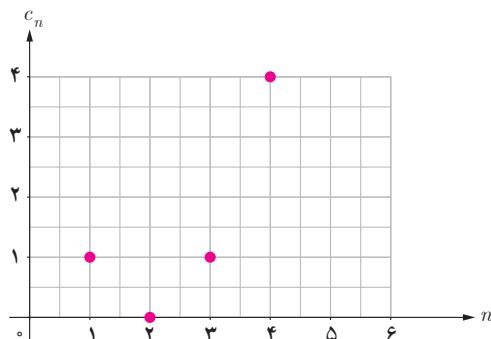
$$a_n = 2n - 1 \quad 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$$



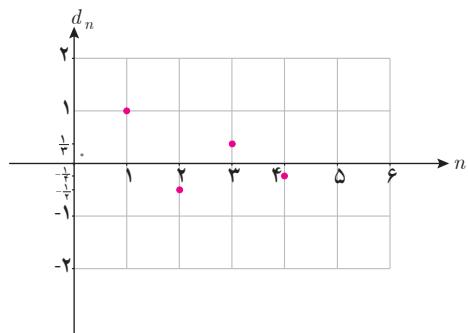
$$b_n = 1 - n \quad 0, -1, -2, -3, -4, \dots$$



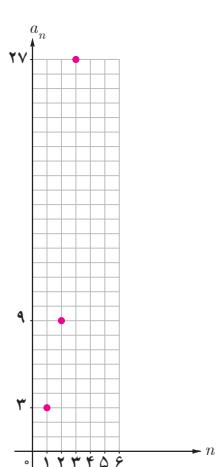
$$c_n = (n - 4)^2 \quad 1, 0, 1, 4, \dots$$



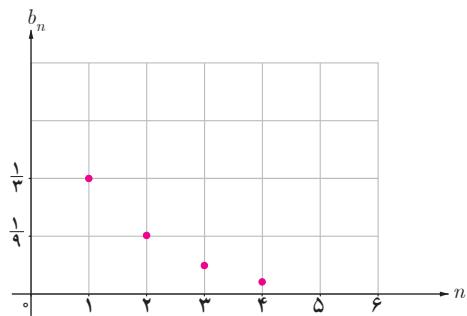
$$d_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$



$$e_n = \varphi^n$$



$$f_n = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n$$



جدول زیر را کامل کنید.

| جملات دنباله | فرمول بازگشتی | ضابطه دنباله | نمودار دنباله |
|---|--|-----------------|---------------|
| $9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ | $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 9$ | $a_n = 3^{2-n}$ | |
| | $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ $a_1 = 1$ | | |
| | | $a_n = 2n + 1$ | |
| | $a_{n+1} = a_n + n$ $a_1 = 1$ | | |
| $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \dots$ | | | |
| $-1, -4, -9, -16, \dots$ | | | |
| | $a_{n+1} = a_{n+1} + a_n$ $a_1 = a_2 = 1^*$ | | |

* دنباله فوق را دنباله فیبوناچی می‌نامند.

۱. برای محاسبه قبض آب^۱ (آب‌ها) هر واحد مسکونی در شهر تهران ابتدا میانگین مصرف هر واحد مسکونی محاسبه می‌شود و بر اساس آن «طبقه مصرفی» واحد مسکونی با توجه به «جدول ۱» تعیین می‌گردد. آنگاه به کمک رابطه زیر، آب‌ها محاسبه می‌شود: هزینهٔ هر متر مکعب با توجه به طبقهٔ مصرف \times میانگین مصرف = آب‌ها^۱

جدول ۱. محاسبه آب‌ها بر اساس طبقات مصرف در استان تهران

| طبقات مصرف (متر مکعب) | هزینه (ریال) | طبقات مصرف (متر مکعب) | هزینه (ریال) |
|-----------------------|--------------|-----------------------|--------------|
| $0 \leq x < 5$ | ۱/۴۱۹ | $25 \leq x < 30$ | ۸/۴۹۶ |
| $5 \leq x < 10$ | ۲/۱۲۳ | $30 \leq x < 35$ | ۱۱/۵۸۰ |
| $10 \leq x < 15$ | ۲/۸۲۷ | $35 \leq x < 40$ | ۱۵/۴۴۴ |
| $15 \leq x < 20$ | ۲/۷۰۳ | $40 \leq x < 50$ | ۳۳/۴۶۲ |
| $20 \leq x < 25$ | ۵/۴۰۰ | $x \geq 50$ | ۶۶/۹۲۴ |

الف) نمودار «طبقهٔ مصرف – آب‌ها» جدول بالا را رسم کنید و ضابطهٔ دامنهٔ و برد تابع را به‌دست آورید.

ب) اگر میانگین مصرف یک واحد مسکونی^۲ در تهران در یک ماه $20/49 m^3$ باشد، سطح زیر منحنی نمودار چه تابعی، آب‌ها را مشخص می‌کند؟

۲. اگر تابع f مدل ریاضی هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنهٔ هر کدام از آنها را مشخص کنید.

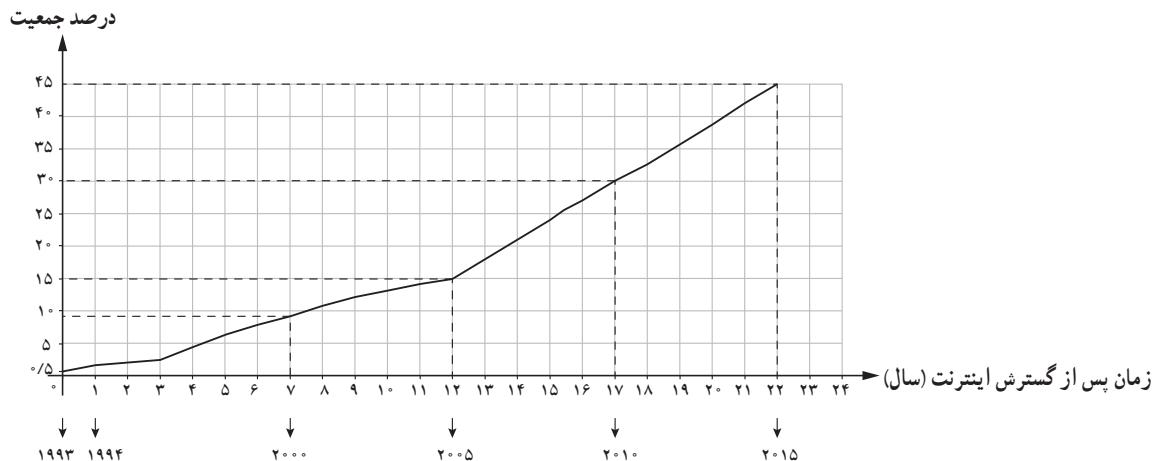
- | | | |
|----------------------------|----------------------------|--|
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | الف) کاهش دمای هوا با دور شدن از سطح زمین تا ارتفاع ۱۵ کیلومتر |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ب) میزان استفادهٔ دانش‌آموزان یک مدرسه از اینترنت در هر ساعت |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ج) حجم مکعبی به ضلع x |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | د) تغییرات سطح دریاچهٔ ارومیه در بیست سال اخیر |
| <input type="checkbox"/> N | <input type="checkbox"/> R | ه) میزان مصرف ماهیانه آب در یک واحد مسکونی |

۱. اطلاعات بالا از پایگاه www.tppw.ir استخراج شده است. در جدول واقعی، پس از محاسبه حاصل ضرب گفته شده بر اساس طبقهٔ مصرف عددی ثابت از عدد به‌دست آمده، کم می‌شود.

با توجه به میانگین مصرف آب در هر واحد مسکونی، مشترکان تقریباً $\frac{1}{3}$ هزینهٔ واقعی تولید آب را می‌برازند. هزینهٔ آب در مقایسه با کشورهای منطقه و بسیاری از کشورهای جهان در ایران بسیار پایین است.

۲. الگوی مصرف برای هر واحد مسکونی در تهران $18 m^3$ است.

۳. نمودار زیر درصد جمعیتی از سراسر جهان را نشان می‌دهد که از ۱۹۹۳ که سال گسترش اینترنت در دنیاست، از اینترنت استفاده کرده‌اند^۱ :



الف) اگر $f(n)$ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان، n سال پس از گسترش اینترنت باشد، به کمک نمودار داده شده مقادیر $f(7)$ و $f(20)$ را مشخص کنید و معنای آن را توضیح دهید.

ب) با توجه به مدل خطی استفاده کنندگان از اینترنت از سال ۲۰۰۵ تا ۲۰۱۵، با به دست آوردن ضابطه تابع خطی، در سال ۲۰۲۰ درصد استفاده کنندگان از اینترنت در جهان چقدر خواهد بود؟

۴. اگر جملات یک دنباله از قانون تابع خطی $y = 4x - 1$ پیروی کنند، با توجه به دامنه دنباله:

الف) نمودار تابع را رسم کنید و نمودار دنباله را روی نمودار تابع مشخص کنید.

ب) نمایش تابعی دنباله و نیز رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید. شبی خط چه ارتباطی با رابطه بازگشتی دنباله دارد؟

۵. با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{1}{3^n - 1}$ ، $b_n = (-\frac{1}{2})^{n+1}$ ، $c_n = \frac{1}{3n - 1}$ ، $d_n = n^2 - 1$ ، حاصل عبارت‌های خواسته شده را به دست آورید.

الف) $a_7 + b_1$

ب) $c_2 - d_1$

ج) $b_4 + d_2$

۶. جملهٔ پنجم دنباله‌های بازگشتی زیر را مشخص کنید.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ ، $a_1 = -2$

ب) $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$ ، $a_1 = 1$

ج) $a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$ ، $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

د) $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ ، $a_1 = 1$

^۱ . data.worldbank.org

۷. جدول زیر را کامل کنید.

| جملات دنباله | رابطه بازگشتی | ضابطه دنباله | دنباله دو ضابطه‌ای |
|---|---------------|--------------|--------------------|
| $5, 8, 11, 14, 17, \dots$ | | | |
| $4, 1, 4, 1, 4, 1, \dots$ | | | |
| $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots$ | | | |
| $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ | | | |

۸. شش جمله اول دنباله بازگشتی $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \text{زوج} \\ 3a_n + 1 & \text{فرد} \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر بنویسید.
 (الف) $a_1 = 11$

(ب) $a_1 = 25$

۹. نمودار دنباله‌های زیر را برای $n \leq 5$ رسم کنید.

$$(الف) a_n = -\frac{1}{2}n + 3$$

$$(ب) a_n = (-\frac{1}{2})^n$$

$$(ج) a_{n+1} = \frac{1}{a_n} \quad a_1 = 2$$

$$(د) a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{زوج} \\ 1 & \text{فرد} \end{cases}$$

۱۰. محاسبه جذر اعداد در تمدن بابل – با نوشتن جملات دنباله بازگشتی زیر می‌توانیم به طرز شکفتانگیزی به جذر عدد k یعنی \sqrt{k} نزدیک شویم.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{k}{a_n}) \quad a_1 = k$$

این روش منسوب به تمدن بابل (واقع در شرق ایران و در بین النهرین) است.

به کمک دنباله بازگشتی بالا، اگر a_2 را تقریبی برای \sqrt{k} در نظر بگیریم، حاصل اعداد زیر را مشخص کنید.

(الف) $\sqrt{2}$

(ب) $\sqrt{3}$

(ج) $\sqrt{5}$

آیا این روش مزیتی بر استفاده از ماشین حساب دارد؟ چرا؟

۱۱. جملات دنباله بازگشتی $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = a_n + (n+1)$ رأس کدام یک از الگوهای زیر را مشخص می‌کند؟



۱۲. مطابق گزارش سازمان محیط زیست، به دلیل ورود پس‌ماندهای صنعتی کارخانه‌ها به یک دریاچه، 25° تن فاضلاب صنعتی به این دریاچه وارد شده است. محیط‌زیست دریاچه سالیانه 10% فاضلاب صنعتی را به صورت طبیعی خشی و بی اثر می‌کند. سازمان محیط زیست با وضع قوانین جدید میزان ورودی فاضلاب صنعتی به دریاچه را به 15 تن در سال کاهش داده است. اگر $P_i = 25^{\circ}$ میزان آلودگی فعلی دریاچه باشد، با نوشتتن یک رابطه بازگشتی، میزان مواد آلوده صنعتی را بعد از دو سال و پنج سال محاسبه کنید.



دریاچه کهیر، لرستان

بازی و ریاضی

آیا می‌توانید ده جمله اول دنباله زیر را مشخص کنید؟

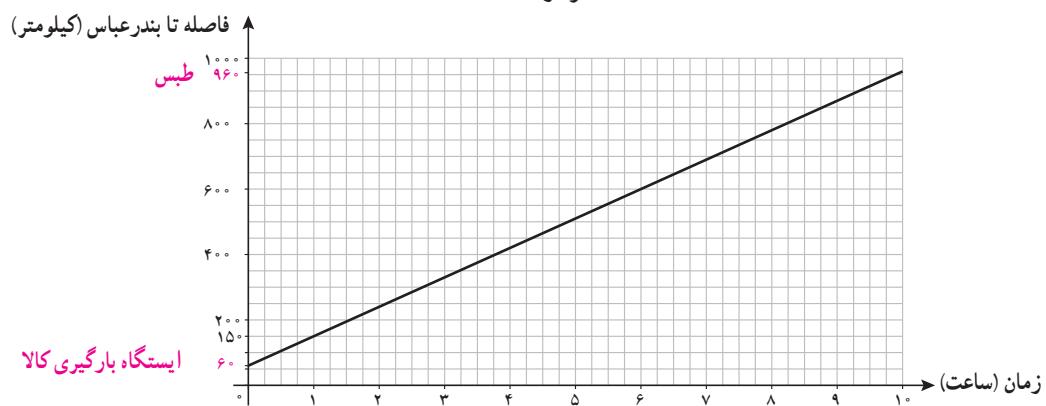
$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}} \quad a_1 = a_2 = 1$$

درس ۲

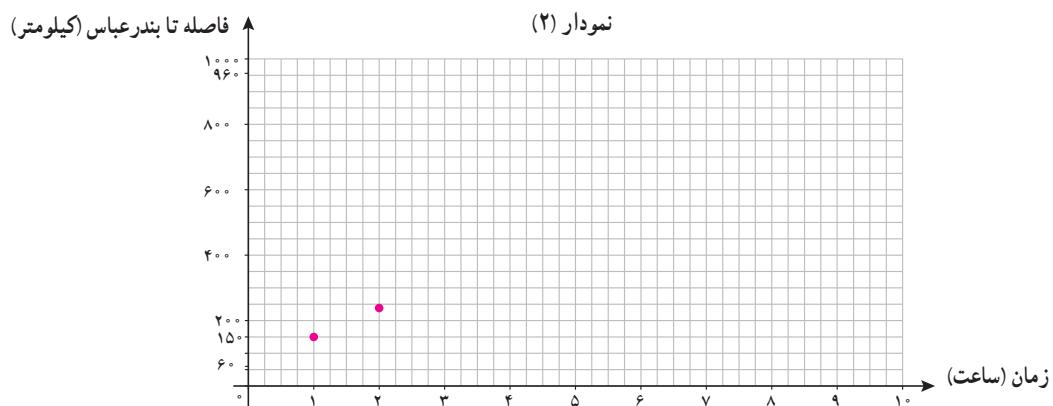
دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در 6° کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان – زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.



- الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.
- ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

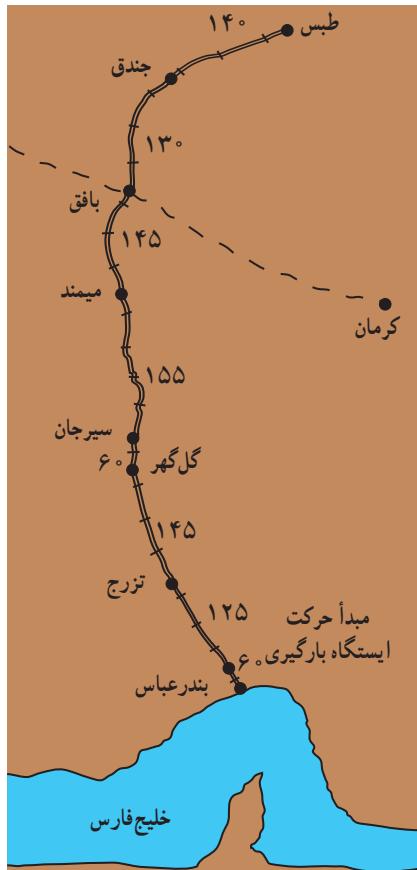


ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارد؟

د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.

جدول ۱

| نام دو ایستگاه متوالی | مسافت | فاصله تا بندرعباس |
|------------------------|-------|-------------------|
| ایستگاه بارگیری - ترزج | ۱۲۵ | $۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$ |
| ترزج - گلگهر | ۱۴۵ | |
| گلگهر - سیرجان | | |
| سیرجان - میمند | | |
| میمند - بافق | | |
| بافق - جندق | | |
| جندق - طبس | | |



ه) با فرض اینکه a_n مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

| $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ |
|--------------------------------------|--|--|-------|--------|
| $a_1 = 6^\circ + 9^\circ = 15^\circ$ | $a_2 = a_1 + 9^\circ$ $= 15^\circ + 9^\circ = 24^\circ$ | $a_3 = a_2 + 9^\circ$ $= \dots \dots \dots$ | | |
| $n=6$ | $n=7$ | $n=8$ | $n=9$ | $n=10$ |
| | | | | |

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \dots \\ a_3 = a_1 + \dots \times 9^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_6 + \dots \\ a_5 = a_1 + \dots \times 9^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{10} + \dots \\ a_{11} = a_1 + \dots \times 9^{\circ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_8 = a_2 + \dots \times 9^{\circ} \\ a_8 = a_5 + \dots \times 9^{\circ} \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (\dots) \times 9^{\circ} \quad (1)$$

(رابطه بازنگشته)

$$a_n - a_m = (\dots) \times 9^{\circ}$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با اضابطه تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a+d, a+2d, a+3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله n ^{ام} این دنباله با رابطه d $a_n = a_1 + (n-1)d$ معرفی می‌شود.

« d » را اختلاف مشترک^۲ دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence

۲. Common Difference

کار در کلاس

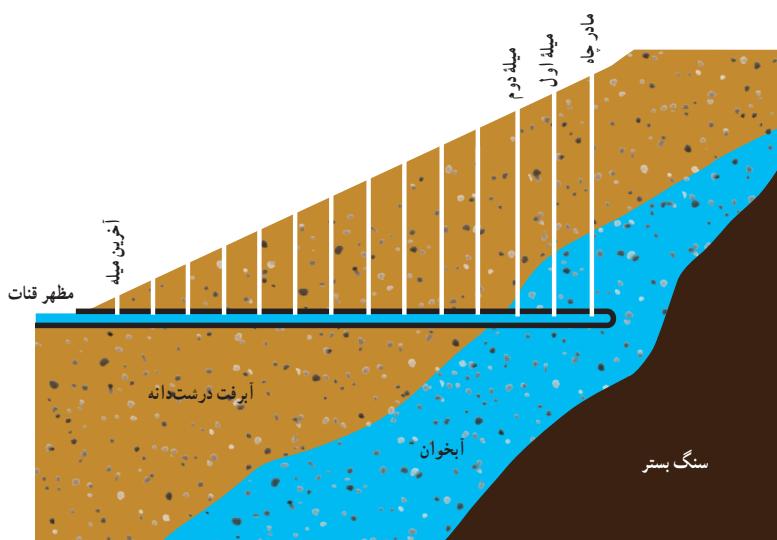
۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.
۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
۳. جدول زیر را کامل کنید.

| جمله اول | اختلاف مشترک | پنج جمله اول | a_n |
|----------|----------------|------------------|-----------------------|
| a | d | | |
| ۲ | ۳ | ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴ | $a_n = 2 + 3(n - 1)$ |
| | | ۴, ۱, -۲, -۵, -۸ | |
| ۴ | $-\frac{1}{2}$ | | |
| | | | $a_n = -3 + 5(n - 1)$ |

کار در کلاس

قنات یا کارینز، راه آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کanal، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقنی^۱ در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کanal و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.

در یک منطقه، مقنی پس از حفر چاه در عمق 3° متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کanal قنات کرده است. با توجه به شب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول $\frac{29}{5}$ متر و میله دوم $\frac{29}{5}$ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله $\frac{1}{5}$ متر باشد، این مقنی در مجموع چند



چاه حفر کرده است؟

۱. مقنی: به کسی می‌گویند که کanal را حفر می‌کند.

خواندنی

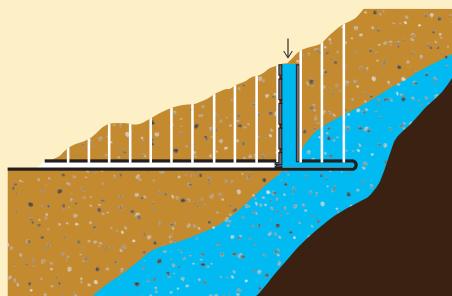
سدی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوپا، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سوزن‌مینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصرخسرو به قنات گتاباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر چاه پیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج 100° طبقه و با عمری سه هزارساله.

حرف صدھا چاه و ایجاد هزاران متر کanal قنات برای انتقال آب حتی با وسائل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت‌فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همتاست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید پیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معرض عظیم بی‌آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با داشت و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعمق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارچ یزد که برای ایجاد آن پیش از هشتاد هزار متر کanal و چاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز پیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جداول مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به‌ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزه خود را بالباس سفید و اشهادگویان شروع می‌کرده‌اند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شبیه ملائم هنگام حفر کanal و به کمک گرانش زمین نیازی به وجود پمپ برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسائل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون چاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن رو که در سده‌های آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با استن آب در انتهای یکی از میله چاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعمق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کرده‌اند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه پایدار، نوشته شده است: "قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست کم به 80° سال پیش از میلاد می‌رسد و تزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد".

پیش از 40° هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور 413 میلیارد متر مکعب است که تزدیک به 296 میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر تقویت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین تزدیک به 30° میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

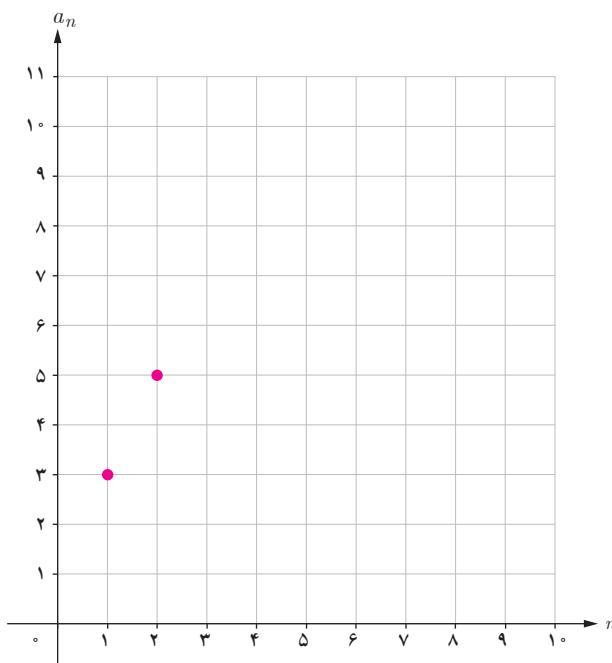
فعالیت

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

ج) شب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟



اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

| ضابطه تابع | دنباله ساخته شده از تابع | چهار جمله اول دنباله | نمودار دنباله |
|--------------|--------------------------|--------------------------------------|---------------|
| $y = 2x - 1$ | $a_n = 2n - 1$ | ۱, ۳, ۵, ۷ | |
| $y = -x + 4$ | | | |
| | | | |
| | | $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$ | |

فعالیت



پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود.^۱ اگر شخصی که سابقه سکته قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، ۲۵ میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونش کاهش یابد:

الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش 13° میلی‌گرم می‌شود؟

ب) نمودار «سطح دارو در بدن - زمان» مسئله بالا را رسم کنید.

ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او 13° میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه $2,600,000$ تومان است که 10% آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری 11 هزار تومان از شرکت دریافت کند و با بت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانه او 3 میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را 30 روزه در نظر بگیرید). با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت 11 هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنباله عددی پیروی می‌کند؛ زیرا:



بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جمله آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

باید

۱. این داروها را در داروشناسی Zero Order Kinetics می‌نامند.

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, 2/5, \dots, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.

(الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.

برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$S_{58} = 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5$$

$$S_{58} = 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30$$

$$2S_{58} = 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = 456/75 \text{ روز} = \text{تعداد روز برای پایان کار}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحويل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ تا a_n و محاسبه مجموع $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی d از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.

۱۹۹ و و ۹ و ۴ و ۱ (الف)

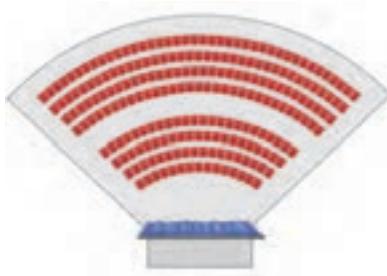
(ب) $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = \dots$$

$$S_r = \dots (a_1 + a_r)$$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با 87° صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = 87^\circ$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

با جایگذاری = d در رابطه بالا = n به دست می‌آید.

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشته، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

(الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$

(ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

(ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$

(د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵ و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعییه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل)، حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد).

۵. در یک کارخانه سنگبری برای صیقل‌دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن 125 g استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به طور میانگین 1875 g از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b ، n عدد را به گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل‌دهند. ثابت کنید

اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).

۷. براساس رابطه به دست آمده در مسئله ۸، سه عدد را به گونه‌ای میان اعداد 10° و 18° قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهنند.

۸. مجموع عددهای زیر را به دست آورید.

(الف) $1 + \dots + 5 + \dots + 401$

(ب) $89 + \dots + 85 + 81 + \dots + 1$



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نرdban‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نرdban که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جایه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نرdban ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نرdban چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

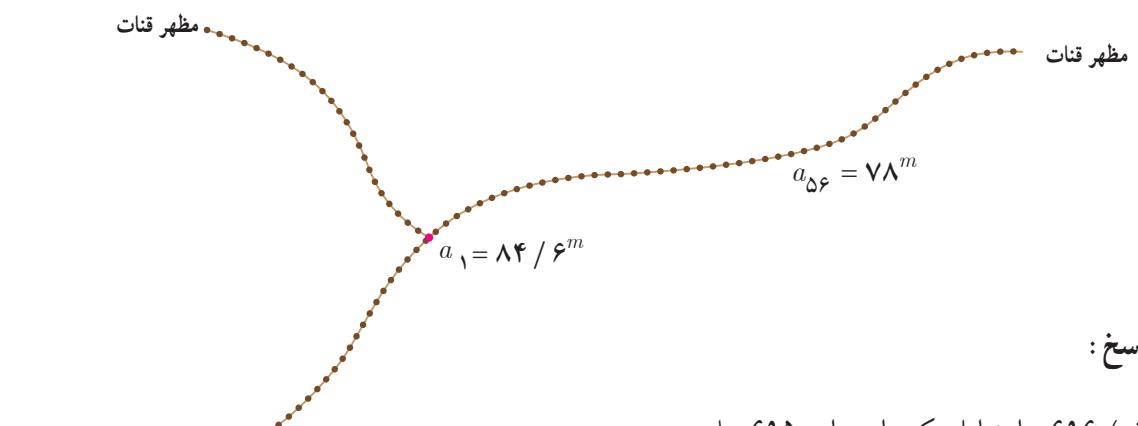
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارچ ۸۴/۶ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شبیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفر یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفر چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کanal قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفر کanal قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه $n^{\text{ام}}$ تا کanal قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید).



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر $\frac{29858}{4}$ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) ۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

د) ۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰ تومان

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دبالة هندسی

درس ۱

توانهای گویا

درس ۲

تابع نمایی

درس ۳



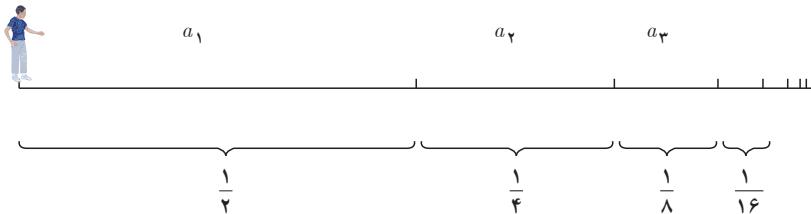
توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارد.

درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟ این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهد رسید! زیرا هر چند هر کدام از فاصله‌ها نصف فاصله‌ها پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهد شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.

به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_1 به زمان $\frac{t}{2}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله ... و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{8}$ و $\frac{t}{16}$ و... هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و در می‌باید که چرا به در خروجی کلاستان خواهد رسید.

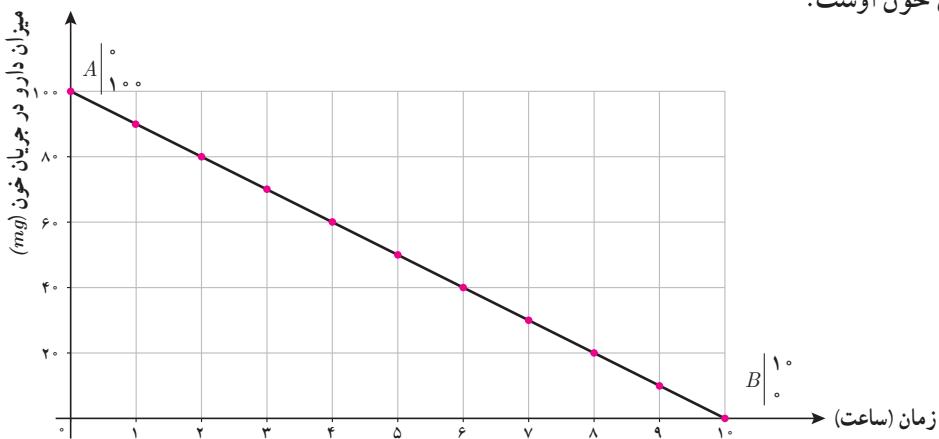
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاؤس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌های مركاتور، برونکور، نیوتون و اویلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل بافتند.

فعالیت

همان‌طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف 100 میلی‌گرم از داروی A ، در هر ساعت 1° میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون است.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش 1° میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت :

$$a_1 = 100 \quad a_{n+1} = a_n - 1^\circ$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده :

$$m_{AB} = \frac{0 - 100}{10 - 0} = -1^\circ$$

$$h = 1^\circ = \text{عرض از مبدأ} \quad \Rightarrow \quad a_n = -1^\circ n + 100$$

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه d (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا :

$$a_1 = 100 : \text{میزان دارو در بدن پس از یک ساعت} \quad \Rightarrow \quad a_n = 100 + (n-1)(-1^\circ) \Rightarrow a_n = -1^\circ n + 100$$

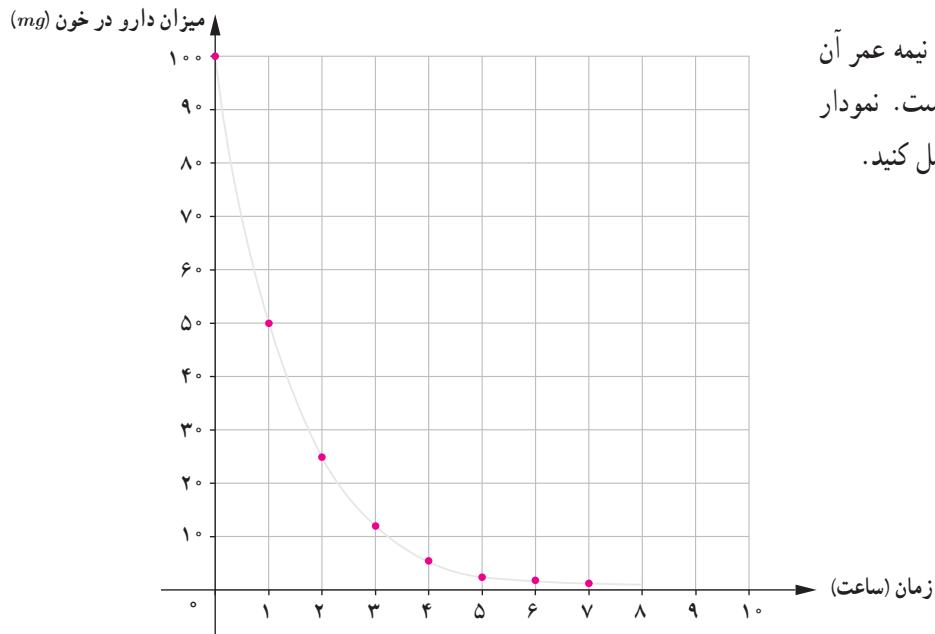
$$d = -1^\circ : \text{کاهش ثابت } 1^\circ \text{ میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو}$$

میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود^۱ و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر» دارو در بدن کاهش می‌باید. فعالیت صفحه بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می‌کند.

۱. اثر این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌باید. نیمه عمر یک دارو را با $\frac{1}{\lambda}$ نشان می‌دهند.

فعالیت



شخصی 100 میلی‌گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون – زمان» را کامل کنید.

(الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از 20 میلی‌گرم خواهد بود؟ آیا می‌توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

(ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت در جمله پیشین بدست می‌آید؛ یعنی :

$$a_1 = 50 \quad a_{n+1} = \dots \dots \dots \quad a_n$$

(ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} a_1 &= 50 & a_2 &= \frac{1}{2} \times 50 & a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 50 \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 50 & a_4 &= \dots \dots \dots \\ && \Rightarrow && a_n &= \dots \dots \dots \times 50 \end{aligned}$$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پژوهشی بسیار اهمیت دارد. برای مثال :

– در درمان بیماری‌های عفونی، آنتی‌بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

– در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شباهنگ روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

– کسانی که برای خواب بهتر در شب از فرصلهای آرام‌بخش استفاده می‌کنند باید در طول روز شاداب و سرحال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می‌آید،
دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است.

جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

| جمله اول | نسبت مشترک | پنج جمله اول | ضابطه بازگشتی | جمله عمومی دنباله |
|----------------------|--------------------|--|--|---|
| $a_1 = 1$ | $r = \frac{1}{3}$ | $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$ | $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = 1$ | $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ |
| $a_1 = \frac{1}{11}$ | $r = \frac{3}{2}$ | | | |
| $a_1 = 4$ | $r = -\frac{1}{2}$ | | $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n$ $a_1 = 4$ | |
| | | $1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$ | | |
| | | | | $a_n = 1 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ |

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

- الف) اگر $1 < r < 0$ ، دنباله a_n است.
- ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n است.
- ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n است.

\.Common ratio

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی \dots, ar^3, ar^2, ar, a را مشخص کنید.

کار در کلاس

(هزینه استهلاک)^۱ — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت 96° هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل 10% ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n باشد :

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک 10% ، ارزش یخچال فریزر در هر سال 90% سال قبل خواهد بود؛ یعنی :

$$v_1 = 960,000 \quad v_2 = 960,000 \times \frac{90}{100} = \dots \dots \dots \quad v_3 = \dots \dots \dots \quad v_n = \dots \dots \dots$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟ با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال 10% کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان 10% آن بیشتر خواهد بود. بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از 10 سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی : با توجه به قیمت خرید اولیه، 96° هزار تومان، نصف ارزش آن 48° هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $480,000 < v_n$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k در صد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

^۱. Depreciation Cost

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه 80 میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از 5 میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

خواهد نداشت

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به‌سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند.

یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست.

توجه به نیمه عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل 8° میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

(الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.

(ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

(ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)

(د) با جایگذاری مقادیر $1 = n$ تا $6 = n$ در رابطه به دست آمده در قسمت (ج)، صحت اعداد به دست آمده در جدول (الف) را بررسی کنید.

(الف) اگر S_n میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

| n تعداد مصرف | تاریخ مصرف | زمان مصرف | S_n (میلی‌گرم) |
|----------------|------------|------------------|--|
| ۱ | ۱۵ بهمن | ۰۰:۰۰ بامداد | $S_1 = 8^\circ mg$ |
| ۲ | ۱۵ بهمن | ۰۰:۰۸ صبح | $S_2 = \frac{1}{2} S_1 + 8^\circ = 4^\circ + 8^\circ = 12^\circ$ |
| ۳ | ۱۵ بهمن | ۰۰:۰۴ بعد از ظهر | $S_3 = \frac{1}{2} S_2 + 8^\circ = 6^\circ + 8^\circ =$ |
| ۴ | ۱۶ بهمن | ۰۰:۰۰ بامداد | $S_4 = \dots + 8^\circ = \dots$ |
| ۵ | ۱۶ بهمن | | $S_5 = \dots = \dots$ |
| ۶ | | | $S_6 = \dots + \dots =$ |

(ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1} = \dots + \frac{1}{2} S_n , \quad S_1 = \dots$$

(ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A = 8^\circ mg$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت (ب) :

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{2} S_1 = \dots$$

$$S_3 = \dots + \dots = A + \frac{1}{2} (A + \frac{1}{2} A) = A + \frac{1}{2} A + (\frac{1}{2})^2 A$$

به همین صورت برای محاسبه S_n :

$$S_n = A + \frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{1}{2}A + \left(\frac{1}{2}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضرب $\frac{1}{2}$ ضرب کنیم :

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}A + \dots + \dots + \dots \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید :

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2}S_n &= A - \left(\frac{1}{2}\right)^n A \Rightarrow \frac{1}{2}S_n = A(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \\ \Rightarrow S_n &= 2A(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n) \end{aligned}$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 8^\circ mg$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = 16^\circ (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n)$$

د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 16^\circ (1 - \left(\frac{1}{2}\right)^1) = 16^\circ \times \frac{1}{2} = 8^\circ \quad S_2 = \dots \quad S_4 = \dots$$

مطابق روشه که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم

مشخص کنیم :

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه :

$$S_n = a \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_4 و S_2 چیست؟

کار در کلاس

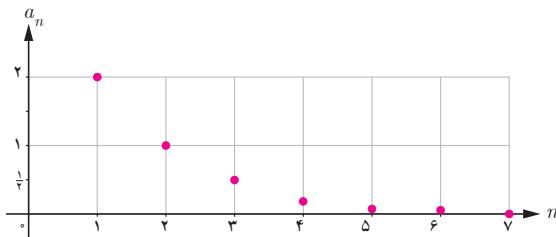
۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

| جملات دنباله | a_1 (جمله اول) | (نسبت مشترک) r | مجموع n جمله اول S_n |
|---|---------------------|-------------------|--|
| $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$ | $a_1 = \frac{1}{2}$ | $r = \frac{1}{3}$ | $S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1 - (\frac{1}{3})^5)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} =$ |
| $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$ | $a_1 = \dots$ | $r = \dots$ | $S_4 =$ $S_8 =$ |
| $\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$ | $a_1 = \dots$ | $r = \dots$ | $S_7 =$ $S_4 =$ |
| $\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$ | $a_1 = \dots$ | $r = \dots$ | $S_6 =$ |

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:

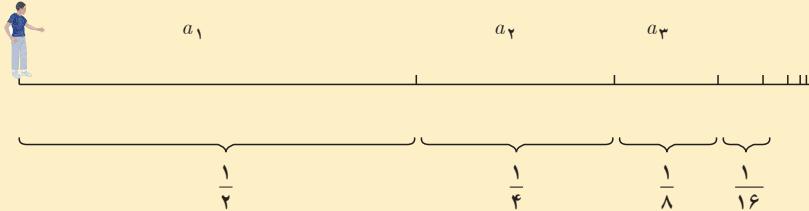
الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

ب) حاصل S_6 را به دست آورید.



خواندنی

جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می‌آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می‌شود و می‌توانیم در حالتی که مجموع بی‌شمار جملات دنباله هندسی خواسته می‌شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

رابطه $T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $\frac{1}{2}$ است:

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$= \frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}}$$

جون n ، تا بینهاست ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بینهاست بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می‌توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t(1 - \cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده‌اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می‌کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می‌پندشت اگر بی‌شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی‌شمار جمله باید بینهاست شود!

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشته مسخن کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$1) \ a_{n+1} = (a_n)^2 \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$2) \ a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

$$3) \ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad a_1 = 1$$

$$4) \ a_{n+1} = 2a_n \quad a_1 = 1$$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه a و b و سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند).

۳. اگر $x+2$ و $x+3$ و x سه جمله متولی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

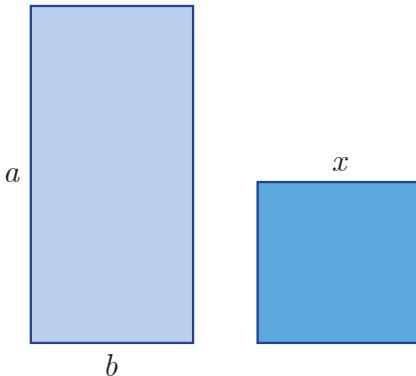
۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه^۱ مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

(الف) اگر داروی شیمی درمانی هر بار 6% سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتداء 10^6 سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟
 (ب) فرض کنید پس از اولین شیمی درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتداء باید تعداد سلول‌های سرطانی اش به کمک شیمی درمانی کمتر از 10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی درمانی شود؟

۵. میان دو عدد a و b ، n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $\frac{b}{a^{n+1}} = r$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است).

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی 27 و جمله پنجم همین دنباله 243 است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۱. مطابق آمار، سالیانه ده هزار نفر در ایران به سرطان سینه مبتلا می‌شوند (مرکز تحقیقات سرطان دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی). در حال حاضر، حدود ۲۵٪ مبتلایان به علت تشخیص دیر رس و تأخیر در شروع درمان جانشان را از دست می‌دهند. تشخیص زودرس در سرطان سینه امکان‌بندیر است و با گنجاندن غربالگری سرطان سینه در نظام بهداشتی کشور و افزایش آگاهی بانوان درباره علامت‌بیماری می‌توان میزان مرگ و میر ناشی از این بیماری را به طور قابل توجهی کاهش داد.

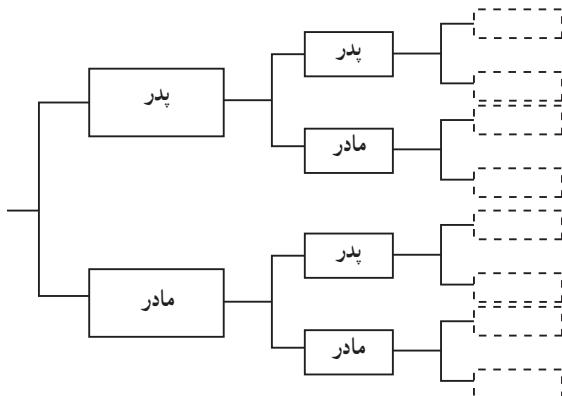


۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است.
اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

- (الف) x و b و a
(ب) a و b و x
(پ) x و a و b

۸. یک شهاب‌سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب‌سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد.
(الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.)
(ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



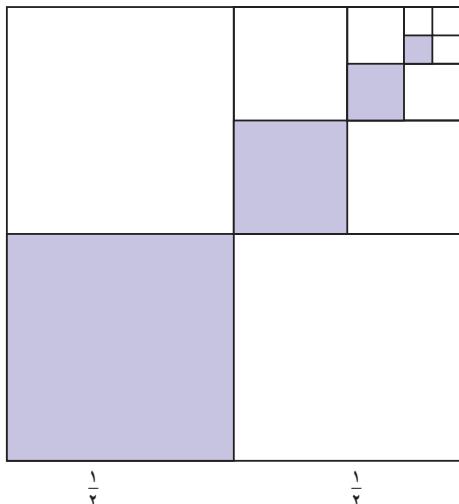
۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

$$(الف) 1 + 4 + 16 + \dots + 4096$$

$$(ب) \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{640}$$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{3}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی‌مانده، مربعی را که با مربع رنگ آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ شده در یک رأس مشترک است، رنگ آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.

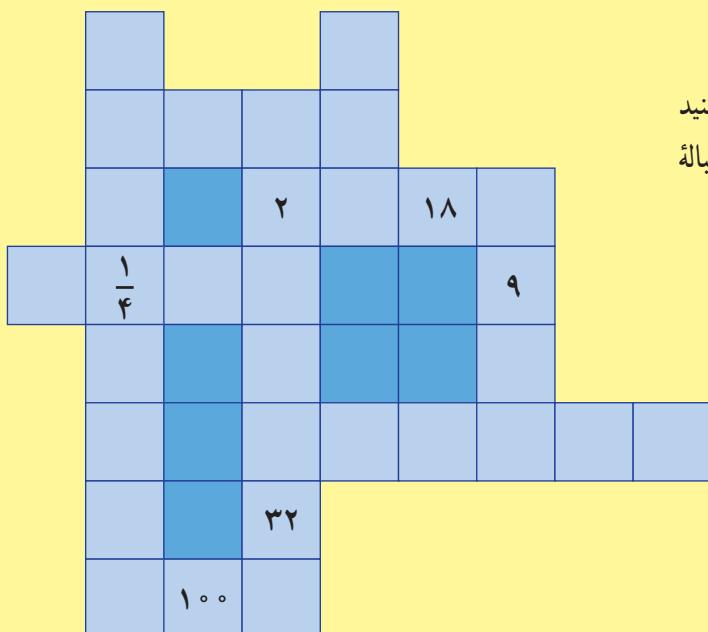


الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

بازی و ریاضی



مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول رو به رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.

درس ۲

«ریشه n^{ام} و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان های صحیح اعداد و نحوه ریشه گیری دوم و سوم آنها آشنا شده اید. فعالیت زیر به شما کمک می کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون درباره اعداد توان دار و ریشه های دوم و سوم اعداد یاد گرفته اید، با مفهوم ریشه های چهارم، پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوه محاسبه آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$4^3 =$$

$$(2)^{-7} =$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^4 =$$

$$73^1 =$$

$$(-3)^6 =$$

$$-3^6 =$$

$$(0/0\cdot 1)^5 =$$

$$(1\frac{1}{2})^0 =$$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت های زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$$(-36)^7 \div 9^7 =$$

$$(2/1)^6 \times \left(\frac{21}{1^{\circ}}\right) \times \left(\frac{1}{21}\right)^4 = (2/1)^{11}$$

$$(-4)^3 \times (-5)^5 =$$

$$\left(\frac{4}{\sqrt[4]{V}}\right)^5 \div \left(\frac{4}{\sqrt[4]{V}}\right)^4 =$$

$$(1^{\circ})^6 =$$

| | |
|-------------------------------------|---|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $(2/1)^{\frac{2}{1}} \times (\frac{2}{1}) \times (2\frac{1}{1})^4 = (2/1)^{11}$ |
| $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ | |
| $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ | |
| $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ | $(-36)^7 \div 9^4 =$ |
| $(a^m)^n = a^{mn}$ | |

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

| | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ | $5^4 \times 5^8 = 5^{4+8} = 5^{12}$ |
| | $9^{10} \div 9^6 = 9^{10-6} = 9^4$ |
| $a^m \cdot b^m = (ab)^m$ | |
| $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$ | |
| | $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}$ |

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، \sqrt{a} و $-\sqrt{a}$ – ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادله درجه دوم $a = x^2$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد 16 ریشه‌های معادله $x^2 = 16$ می‌باشند و چون $4^2 = 16$ و $-4^2 = 16$ (–)، پس 4 و -4 – یا $\sqrt{16}$ و $-\sqrt{16}$ – ریشه‌های دوم عدد 16 هستند. همچنین، ریشه سوم عدد حقیقی مانند a ، ریشه معادله $a = x^3$ است. برای مثال، ریشه سوم عدد 27 ، ریشه معادله $x^3 = 27$ است که برابر 3 می‌باشد. با همین استدلال، ریشه پنجم عدد -32 ، پاسخ معادله $x^5 = -32$ است که برابر -2 و ریشه‌های ششم عدد 64 ، ریشه‌های معادله $x^6 = 64$ هستند که برابر $+2$ و -2 می‌باشند. جدول صفحه بعد را مانند نمونه کامل کنید.

| -64 | 64 | عدد (a) |
|-----------------|-------------------------------|----------------|
| وجود ندارد | $\sqrt[3]{64}, -\sqrt[3]{64}$ | ریشه‌های چهارم |
| وجود ندارد | $\sqrt[4]{64}$ | $\sqrt[4]{a}$ |
| $\sqrt[5]{-64}$ | $\sqrt[5]{64}$ | ریشه‌های پنجم |
| | | $\sqrt[6]{a}$ |
| | | ریشه‌های ششم |
| | | $\sqrt[8]{a}$ |
| | | |
| | | |

اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، $b^n = a$ را یک ریشه n ام عدد a می‌نامیم، هرگاه :

همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشه n ام مثبت عدد a است.

در حالت کلی‌تر، درباره ریشه‌های n ام ($n \in \mathbb{N}$) عددی مانند a می‌توان گفت:

| | | |
|------------|--------------|---|
| $a \geq 0$ | n زوج باشد | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, -\sqrt[n]{a}$ ریشه n ام |
| | n فرد باشد | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ریشه n ام |
| $a < 0$ | n زوج باشد | ریشه ندارد |
| | n فرد باشد | $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ریشه n ام |

کار در کلاس

- با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به دست آورید.

$a \geq 0$ ریشه‌های اُم عدد n زوج است و $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{25} = -1/495$, $\sqrt[n]{25} = 1/495$

$a \geq 0$ فرد است و $n : a = , n = \Rightarrow$

$a < 0$ زوج است و $n : a = , n = \Rightarrow$

$a < 0$ فرد است و $n : a = , n = \Rightarrow$

۲. با توجه به اینکه $|a| = \sqrt[n]{a^n}$ و $\sqrt[n]{a^n} = a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \geq 2$ برقرار است؛ یعنی :

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ زوج است} \\ a & n \text{ فرد است} \end{cases}$$

برای مثال، $\sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{(-3)^4} = 5$ همچنین $\sqrt[5]{(-\frac{1}{3})^5} = -\frac{1}{3}$ و $\sqrt[5]{(-15)^1} = -15 = 15$

توان‌های گویا

سهامداران یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعه شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیر عامل در جلسه ارائه گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانه شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایه شرکت را 100 میلیون تومان، سود سالانه آن را 20% و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهامداران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایه شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند :

$$\text{سود (بر حسب سال)} \rightarrow t = 100 \times (1/2)^t = \text{سرمایه شرکت (بر حسب میلیون تومان)}$$



برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایه شرکت را به صورت زیر حساب کرد :

$$\text{سود (بر حسب سال)} = 100 \times (1/2)^1 = 120$$

$$\text{سود (بر حسب سال)} = 100 \times (1/2)^2 = 144$$

حال اگر سهامداران این شرکت می‌خواستند سرمایه شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوه کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوه استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شویم.

فعالیت



۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیه باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

| زمان (ساعت) | ۱ | ۲ | ۳ | | ۵ | | ۷ | — | <i>t</i> |
|-------------|---|---|---|------------|---|------------|---|---|----------|
| جرم (گرم) | | | | $2^4 = 16$ | | $2^6 = 64$ | | — | 2^t |

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منظر شویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد: نظر خودت درباره جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که 2^2 گرم شود، اما مقدار 2^2 را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^2$ می‌شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^2 = 2$ یعنی $a = \sqrt{2}$. (زیرا a مثبت است). بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{2}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{2}$ را به صورت توانی از ۲ بنویسیم.

معادله $2^b = \sqrt{2}$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار b را به دست آوریم.

$$\sqrt{2} = 2^b \quad \xrightarrow{\text{طرفین را به توان } 2 \text{ می رسانیم}} \quad (\sqrt{2})^2 = (2^b)^2 \Rightarrow 2 = 2^{2b} \Rightarrow 2^1 = 2^{2b} \Rightarrow 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین، داریم: } \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{1}{2}$ ساعت)، $2^{\frac{1}{4}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم

باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد: چون پانزده دقیقه، $\frac{1}{4}$ ساعت است، پس $2^{\frac{1}{4}}$ گرم یا $\sqrt[4]{2}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به دست آورید.

$$= \text{پس از } 10 \text{ دقیقه (ساعت)} = \sqrt[6]{2} = \text{پس از } 20 \text{ دقیقه (ساعت)}$$

برای هر عدد طبیعی $n \geq 2$ ، توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a > 0$ ، $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $\frac{1}{2}(2)$ و $\frac{1}{3}(-1)$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنان،

هرجا عبارت‌های $a^{\frac{1}{n}}$ بیان می‌شود، a عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که:

درباره توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم:

$$3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2 \times 1}{3}} = (3^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$7^{\frac{5}{4}} = 7^{\frac{5 \times 1}{4}} = (7^5)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

و به طور کلی، داریم:

هرگاه $a > 0$ ، برای دو عدد طبیعی m و n ، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$$

$$\text{بنابراین، } a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$$

$$\text{همچنان } a^{-\frac{m}{n}} \text{ نیز به این صورت تعریف می‌شود:}$$

اعداد توان دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$$5^{\frac{3}{4}} =$$

$$6^{\frac{7}{9}} =$$

$$12^{-\frac{2}{11}} =$$

$$(2 \frac{1}{3})^{-\frac{8}{3}} =$$

$$(0.001)^{\frac{14}{4}} =$$

روابطی که در ابتدای درس درباره توان های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان های گویا و حقیقی^۱ اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت های توانی زیر را به صورت رادیکالی و عبارت های رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید.

$$3^{\frac{1}{4}} =$$

$$7^{\frac{1}{8}} =$$

$$\sqrt[3]{25} =$$

$$\sqrt[7]{2/7} =$$

$$(0/31)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sqrt[10]{1} =$$

۲. با توجه به مسئله بیان شده در ابتدای معرفی توان های گویا، سرمایه شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان های خواسته شده به دست آورید.

$$100 \times (1/2)^{\frac{1}{2}} = 100 \times \sqrt{1/2}$$

: ۳ سال و ۶ ماه بعد

۲۰۰ روز بعد :

: ۱ سال و ۲ ماه بعد

۱- در این کتاب، تمامی توان های اعداد، گویا هستند.

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان دار زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\frac{1}{4^2} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{2 \times \frac{1}{2}}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$100^{\frac{1}{2}} =$$

$$125^{-\frac{1}{3}} =$$

$$32^{\frac{1}{5}} =$$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$(2 \times 8)^{\frac{1}{4}} =$$

$$-4(1000)^{\frac{1}{3}} =$$

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} =$$

$$7^{\frac{3}{4}} \times 7^{\frac{5}{4}} =$$

$$125^{\frac{2}{3}} \div 125^{\frac{1}{4}} =$$

$$8^{\frac{2}{7}} \times (1/5)^{\frac{2}{7}} =$$

۵. دانشآموزی $\sqrt[3]{-8}$ را به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[3]{-8}$ به صورت $(-8)^{\frac{1}{3}}$ نادرست است.

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویانشان دهید که $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[4]{5^3}$ ، $\sqrt[6]{5^3}$ با هم برابرند.

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a ، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$$3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{4}} =$$

$$5^{\frac{1}{4}} \times 5^{(-\frac{1}{4})} =$$

$$8^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} =$$

$$(2^6)^{\frac{1}{3}} =$$

$$(\frac{m^4}{n^6})^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}} \right)^{-4} =$$

$$3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} =$$

$$(m^{\frac{3}{4}} \cdot n^{\frac{1}{2}})^2 (m^{\frac{1}{2}} n^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} =$$

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$$8^x \times 9^5 = 72^5$$

$$(0/36)^4 \times (0/36)^x \times (0/36)^{-6} = (0/36)^4$$

$$(2^x)^6 = \frac{1}{3^2}$$

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (حجم کره) به دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم ۷ را از فرمول زیر به دست آورد.

$$r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

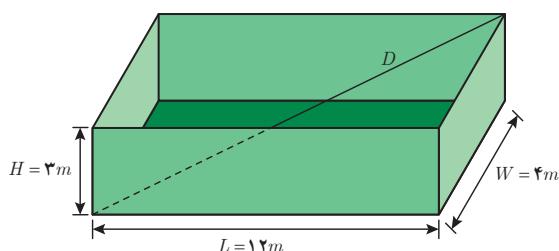
ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\frac{32\pi}{3}$ است، به دست آورید.



۵. اگر D قطر جعبه‌زیر باشد، اندازه آن از طریق تابع $D = (L + W + H)^{\frac{1}{2}}$ (طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازه D را به دست آورید.

ب) اگر اندازه $L = W = H = 1m$ باشد، اندازه D را به دست آورید.



درس ۳

تابع نمایی

فعالیت

«بنیاد ملی بازی‌های رایانه‌ای» با هدف تبیین، تقویت و ترویج مبانی فرهنگ و هویت ایرانی- اسلامی و حمایت کامل از ظرفیت‌های موجود صنعت بازی‌های رایانه‌ای، از سال ۱۳۸۵ شروع به کار کرده و تاکنون تولیدات خوبی داشته است.

یکی از تولیدات این بنیاد، «مجموعه بازی‌های سبز» است که قرار است دانشآموز را در قالب بازی، به آموزش و نگهداری از منابع و ترویج فرهنگ درخت کاری هدایت کند. بازی به این صورت است که در شروع بازی یک امتیاز به بازیکن داده می‌شود. اگر بازیکن بتواند در طول بازی در مرحله اول، یکی از عوامل آلوده‌کننده محیط‌زیست را شناسایی و نابود کند، ۳ امتیاز می‌گیرد. در مرحله دوم، اگر بازیکن بتواند عامل دیگری را که باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود شناسایی و نابود کند، ۹ امتیاز می‌گیرد و به همین ترتیب در مرحله بعد، ۲۷ امتیاز، در مرحله بعد از آن ۸۱ امتیاز و... خواهد گرفت. بازی زمانی تمام می‌شود که بازیکن به امتیاز 46721^{43} برسد. اگر کنون به سوالات زیر پاسخ دهید.

۱. فکر می‌کنید در مرحله ششم، بازیکن چند امتیاز خواهد گرفت؟
برای یافتن پاسخ، جدول زیر را کامل کنید.

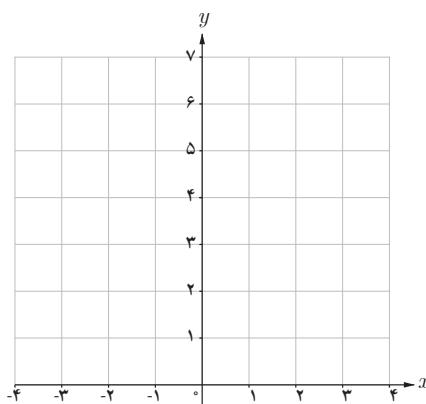
جدول ۱

| میزان امتیاز‌های کسب شده | تعداد مراحل بازی |
|--------------------------|------------------|
| $3^0 = 1$ | ۰ |
| $3^1 = 3$ | ۱ |
| $3^2 = 9$ | ۲ |
| $3^3 = 27$ | ۳ |
| ? | ۴ |
| ۲۴۳ | ? |
| ? | ۶ |
| ? | ۷ |
| ? | ۸ |
| ? | ۹ |
| ? | ۱۰ |

۲. در کدام مرحله، میزان امتیازات کسب شده ۶۵۶۱ خواهد شد؟
۳. آیا اعداد این جدول، الگویی را مشخص می‌کند؟ بین تعداد مراحل بازی و میزان امتیازات کسب شده، رابطه‌ای به دست آورید.
۴. با توجه به رابطه به دست آمده در قسمت قبل، آیا می‌توانید امتیازات کسب شده در مراحل دهم، بیستم و یا مرحله n ام را به دست آورید؟

فعالیت

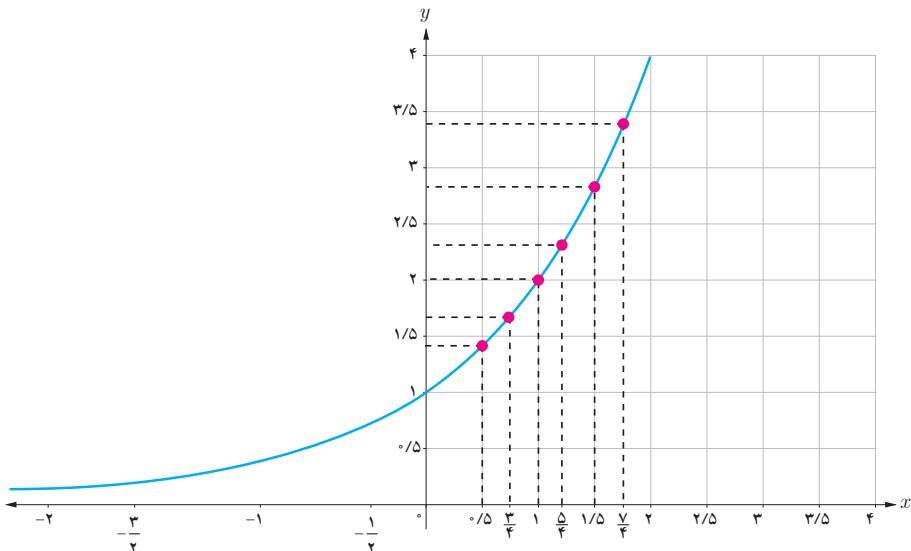
- در بخش دنباله‌ها، با توجه به مثلث خیام و اعداد واقع در این مثلث، الگویی را به دست آوردم که به عنوان تابع از ضابطه $f(n) = 2^n$ پیروی می‌کرد. دوباره به این فعالیت برمی‌گردیم؛
۱. مقادیر به دست آمده در آن فعالیت را در جدولی تنظیم کنید و نقاط به دست آمده را روی دستگاه مختصات زیر نمایش دهید.



۲. جدول زیر را با ماشین حساب کامل کرده‌ایم. این نقاط را نیز در دستگاه مختصات بالا نشان دهید.

| x | 2^x |
|----------------|---------|
| ۰ | ۱ |
| $-\frac{1}{2}$ | 0.707 |
| -1 | 0.500 |
| $-\frac{3}{2}$ | 0.352 |
| -2 | 0.250 |

۳. اگر مقادیر تابع $f(x) = 2^x$ را برای x های دیگر نیز به دست آوریم، نمودار زیر خواهد بود :



هر تابع به صورت $y = a^x$ ، که a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف یک است، یک تابع نمایی^۱ نامیده می شود.

تذکر : حرف a معرف پایه و حرف x معرف نما یا توان است. با نمادهای تعریف شده در سال دهم برای یک تابع، می توان تابع نمایی f را به صورت زیر تعریف کرد :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$f(x) = a^x \quad (a > 0, a \neq 1) \quad \text{منظور از } \mathbb{R}^+, \text{ مجموعه } \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\} \text{ است.}$$

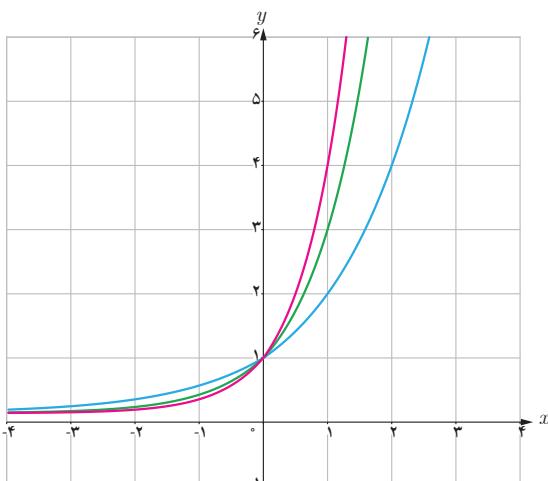
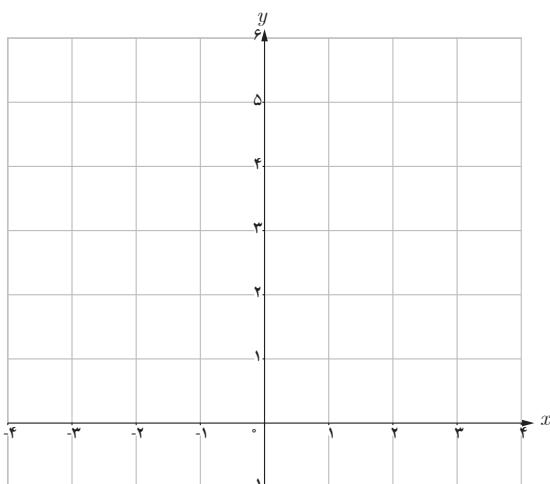
فعالیت

الف) در فعالیت ابتدای این درس با تابع نمایی $y = 3^x$ آشنا شدید. نقاط y حاصل شده در جدول صفحه بعد را روی محورهای مختصات به دست آورید. سپس آنها را به هم وصل کنید.

۱- این تابع به این علت نمای نامیده می شود که متغیر x در نمای توان قرار دارد.

جدول ۲

| x | 3^x | y | محاسبه y با استفاده از ماشین حساب تا سه رقم اعشار |
|----------------|--------------------|-----------------------|---|
| -۲ | 3^{-2} | $\frac{1}{9}$ | ۰/۱۱۱ |
| $-\frac{۳}{۲}$ | $3^{-\frac{۳}{۲}}$ | $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ | ۰/۱۹۲ |
| -۱ | 3^{-1} | $\frac{1}{3}$ | ۰/۳۳۳ |
| $-\frac{۱}{۲}$ | $3^{-\frac{۱}{۲}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | ۰/۵۷۷ |
| ۰ | 3^0 | ۱ | ۱ |
| $\frac{۱}{۲}$ | $3^{\frac{۱}{۲}}$ | $\sqrt{3}$ | ۱/۷۳۲ |
| ۱ | 3^1 | ۳ | ۳ |
| $\frac{۳}{۲}$ | $3^{\frac{۳}{۲}}$ | $3\sqrt{3}$ | ۵/۱۹۶ |
| ۲ | 3^2 | ۹ | ۹ |



همانگونه که دیده می‌شود، نمودار تابع $y = 3^x$ در نقطه یک محور y ‌ها را قطع می‌کند.

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = 3^x$ ، مقدار تقریبی عدد $3^{\frac{۵}{۲}}$ را به دست آورید.

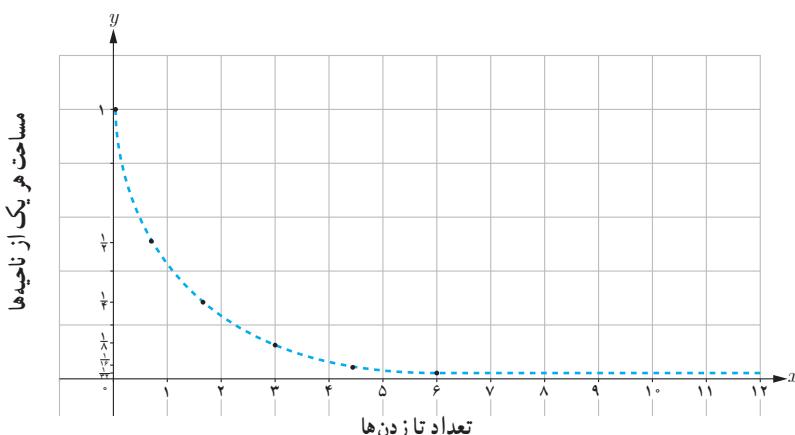
پ) نمودار توابع $y = 2^x$ ، $y = 3^x$ و $y = 4^x$ را در یک دستگاه رسم کرده‌ایم. ابتدا مشخص کنید کدام نمودار بیانگر هر یک از توابع فوق است. سپس، تفاوت‌ها و شباهت‌های بین این سه تابع را بیان کنید.

یک صفحه کاغذ سفید را انتخاب کنید و آن را به دو قسمت مساوی تا بزنید. بعد از تازدن، دو ناحیه به وجود می‌آید که مساحت هر یک، نصف مساحت اولیه است. اکنون کاغذ تا شده را یک بار دیگر تا بزنید. در دومین تازدن، چهار ناحیه ایجاد می‌شود که مساحت هر کدام از آنها، نصف مساحت قبلی، یعنی $\frac{1}{4}$ مساحت اولیه است. در جدول ۳ چگونگی تغییر مساحت ناحیه‌هایی که بر اثر تازدن‌های متوالی ایجاد می‌شوند، نشان داده شده است.

جدول ۳

| میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها | تعداد تازدن‌ها |
|-------------------------------|----------------|
| ۱ | ۰ |
| $\frac{1}{2}$ | ۱ |
| $\frac{1}{4}$ | ۲ |
| $\frac{1}{8}$ | ۳ |
| $\frac{1}{16}$ | ۴ |
| $\frac{1}{32}$ | ۵ |
| ⋮ | ⋮ |
| $\frac{1}{1024}$ | ۸ |

با توجه به اعداد جدول ۳، چه الگویی را می‌توانید پیشنهاد دهید؟ در نمودار زیر، رابطه تعداد تازدن‌ها و میزان مساحت هر یک از ناحیه‌ها نمایش داده شده است.



نقطه تقاطع منحنی با محور y‌ها چیست؟

فعالیت

۱. تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را در نظر بگیرید و با استفاده از ماشین حساب، جدول زیر را کامل کنید.

جدول ۴

| x | $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | y | محاسبه y با ماشین حساب تا ۳ رقم اعشار |
|----------------|---------------------------------|-----|---|
| -۲ | $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ | ۴ | ۴ |
| $-\frac{3}{2}$ | | | |
| -۱ | | | |
| $-\frac{1}{2}$ | | | |
| ۰ | | | |
| $\frac{1}{2}$ | | | |
| ۱ | | | |
| $\frac{3}{2}$ | | | |
| ۲ | | | |

۲. نقاط به دست آمده در جدول بالا را روی صفحه مختصات به دست آورید و به هم وصل کنید. آیا می‌توانید به کمک نمودار،

مقدار تابع $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را برای هر عدد دلخواه x حدس بزنید؟

۳. نمودار تابع $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را با نمودار تابع $y = 2^x$ ، که در فعالیت‌های قبلی رسم کرده بودید، مقایسه کنید. چه تفاوت اساسی بین

این دو نمودار ملاحظه می‌کنید؟

در تابع نمایی $y = a^x$ ، اگر $a < 1$ باشد، وقتی x بزرگ می‌شود، مقدار y کم می‌شود و برای x ‌های کوچک‌تر

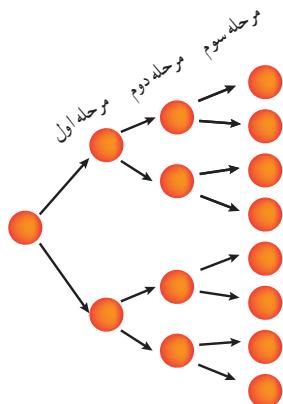
از صفر، با کاهش مقدار x مقدار y به سرعت افزایش پیدا می‌کند.

کار در کلاس

تابع نمایی $a^x = f(x)$ را در نظر بگیرید. با انتخاب عدد $a > 1$ ، نمودار $f(x)$ را رسم کنید. نمودار $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ را در همان صفحه مختصات رسم کنید. دو نمودار حاصل را با هم مقایسه کنید.

تمرین

۱. در پژوهشکده رویان وابسته به جهاد دانشگاهی، سلول‌های بنیادی جنین انسان تولید می‌شود. این سلول‌ها قابلیت تکثیر نامحدودی دارند و می‌توانند تمام انواع سلول‌های بدن نظیر عصب و ماهیچه قلب را به وجود آورند. در شکل زیر، روند تکثیر سلول بنیادی جنین در سه مرحله نشان داده شده است.



اگر روند تکثیر سلول بنیادی جنین مانند شکل بالا، ادامه پیدا کند :

الف) پس از چند مرحله، تعداد سلول‌های تکثیر شده $20 \cdot 48$ سلول خواهد شد؟

ب) در مرحله هشتم، چه تعداد سلول تکثیر شده است؟

پ) آیا می‌توانید الگویی برای تکثیر سلول‌ها مشخص کنید؟

۲. یک نمونه واقعی (شبیه به تمرین یک) بیان کنید که از الگوی تابع نمایی پیروی کند.

۳. در شکل صفحه بعد، نمودار دو تابع $y = 4^x$ و $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ رسم شده است. مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است.



۴. نمودار توابع $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ آنها را برشمرید.

۵. نمودار توابع $y = 3^x$ و $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ را در یک دستگاه رسم کنید و سپس، آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

رشد و زوال نمایی

در این قسمت یکی از کاربردهای مهم توابع نمایی را بررسی می‌کنیم. ابتدا رشد نمایی را مورد توجه قرار می‌دهیم :

فعالیت

احسان هفده ساله است. پدرش قصد دارد مبلغ ده میلیون تومان برای او سرمایه‌گذاری کند. او با توجه به اینکه سال ۱۳۹۷ به فرموده رهبر معظم انقلاب اسلامی سال «حمایت از کالای ایرانی» نام‌گذاری شده است، تصمیم گرفته است که این مبلغ را در یک شرکت تولیدکننده کالای ایرانی سرمایه‌گذاری کند. این شرکت اعلام کرده است که در پاسخ به اعتماد سرمایه‌گذاران به فعالیت‌های تولیدی‌اش، در پایان هر سال، ۱۴ درصد سود علی الحساب به آنان پرداخت خواهد کرد.

جدول زیر را در نظر بگیرید:

جدول ۵

| سن احسان | مبلغ سرمایه‌گذاری شده در شرکت تولیدی |
|----------|--------------------------------------|
| ۱۷ | ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان |
| ۱۸ | |
| ۱۹ | |
| ⋮ | |
| ۲۳ | |

برای تکمیل جدول بالا، ابتدا مبلغ سرمایه‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان (یک سال بعد از سپرده‌گذاری در شرکت) را به دست آورید.

$$10,000,000 + \left(\dots \times \frac{14}{100} \right) = \dots + 1,400,000 = 11,400,000$$

بنابراین، در جدول شماره ۵، باید در سطر دوم عدد ۱۱,۴۰۰,۰۰۰ گذاشته شود.

اکنون سطر سوم جدول را محاسبه کنید.

در واقع، باید میزان مبلغ سپرده‌گذاری شده در ۱۸ سالگی احسان را در نظر بگیریم و براساس سود ۱۴ درصد، مبلغ جدید سپرده‌گذاری شده را در ۱۹ سالگی او (دو سال پس از سرمایه‌گذاری اولیه) به دست آوریم :

$$11,400,000 + \dots = \dots + \dots = \dots$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، میزان موجودی در ۱۹ سالگی احسان به صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$10,000,000 \times (1/14)^t = 12,996,000$$

با توجه به فرمول فوق، میزان موجودی را در ۲۳ سالگی احسان به دست آورید و جدول صفحه قبل را کامل کنید.

معادله کلی رشد نمایی، به صورت $f(t) = c(1+r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان رشد (تغییرات بر حسب اعشار) و t بیانگر زمان است.

بنابراین در فعالیت قبل، معادله کلی که بیانگر مبلغ سرمایه‌گذاری پس از t سال است، به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$f(t) = 10,000,000 \times (1 + 0/14)^t$$

کار در کلاس

در ابتدای سال ۱۹۹۰ میلادی، جمعیت کره زمین حدود ۵/۲ میلیارد نفر بوده است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۲ درصد در سال باشد، پس از ۳۰ سال جمعیت کره زمین به چند میلیارد نفر خواهد رسید؟ پس از ۳۵ سال، ۷۰ سال و ۱۰۵ سال جمعیت کره زمین چه میزان خواهد شد؟ با توجه به محاسبات بالا، آیا می‌توانید وضع جمعیت کره زمین را در هر دوره زمانی ۳۵ ساله مقایسه کنید؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زوال نمایی

اگر مقدار تابع پس از گذشت زمان کاهش یابد، به آن مسئله زوال می‌گوییم. حال اگر تابع مورد نظر تابع نمایی باشد، می‌توان صحبت از زوال نمایی کرد.

معادله کلی زوال نمایی، به فرم $f(t) = c(1-r)^t$ است که در آن $f(t)$ بیانگر مقدار نهایی، c بیانگر مقدار اولیه، r بیانگر میزان نزول بر حسب اعشار و t بیانگر زمان است.

مثال : جمعیت کشوری، در سال ۲۰۰۰ میلادی حدود چهل میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن در سال ۲۰۱۸ میلادی چند نفر خواهد بود؟

حل : با جایگذاری c ، r و t در معادله کلی زوال نمایی، جمعیت این کشور در سال ۲۰۱۸ میلادی برابر است با:

$$y = 40,000,000 \cdot (1 - r)^t = 3,338,600$$

تمرین

- در یکی از فعالیت‌های بخش اول این درس، به یک شرکت تولیدکننده محصولات فرهنگی اشاره کردیم. اگر یکی از سهامداران این شرکت، در سال ۱۳۹۷ مبلغ چهل میلیون تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری کد، پس از ده سال چه مبلغی به سرمایه این سهامدار اضافه خواهد شد؟
- جمعیت شهری یک میلیون نفر است. اگر رشد جمعیت به صورت نمایی و با ضریب ثابت 6% درصد در سال باشد، جمعیت این شهر پس از ده سال چند نفر خواهد شد؟
- جزیره‌ای پر از موش شده بود. مسئولان تصمیم گرفتند به کمک گربه‌ها با موش‌ها مقابله کنند. در آن سال، جمعیت موش‌ها 23576 بود که پس از مبارزه با آنها، این تعداد با نرخ $2/5$ درصد در سال رو به کاهش گذاشت. در همان سال، جمعیت گربه‌ها 15786 بود که با نرخ $1/8$ درصد در سال رو به افزایش گذاشت.
 (الف) در یک جدول، جمعیت موش‌ها را در 10 سال متوالی به دست آورید.
 (ب) همین کار را برای جمعیت گربه‌ها طی 10 سال متوالی انجام دهید.
 (پ) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت گربه‌ها بیشتر از موش‌ها می‌شود؟
 (ت) آیا می‌توانید حدس بزنید که در چه زمانی جمعیت موش‌ها و گربه‌ها با یکدیگر برابر می‌شود؟
 (ث) اگر همین روند ادامه پیدا کند، برای جمعیت گربه‌ها و موش‌ها چه اتفاقی می‌افتد؟



منابع

- ۱- امیری، حمیدرضا، بیژن زاده، محمد حسن، بهرامی سامانی، احسان، حیدری، رضا، داورزنی، محمود، ریحانی، ابراهیم، سید صالحی، محمد رضا و قربانی، مجتبی (۱۳۹۶). ریاضی (۱) - چاپ دوم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۲- امیری، حمیدرضا، ایرانمنش، علی، فرزان، آزاده، صدر، میر شهرام، میرزایی، حسین، محمدپور، عادل و خان زاده، فرشید (۱۳۹۶). ریاضی و آمار (۱) - چاپ دوم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۳- امیری، حمیدرضا، ایرانمنش، علی، فرزان، آزاده، محمدپور، عادل، میرزایی، حسین، و مین باشیان، هادی (۱۳۹۶). ریاضی و آمار (۲) - چاپ اول، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۴- ایرانمنش، علی، جمالی، محسن، ربیعی، حمید رضا، ریحانی، ابراهیم، شاهورانی، احمد، و عالمیان، وحید (۱۳۹۶). ریاضیات (۲) - چاپ هفتم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.
- ۵- بخشعلی زاده، شهرناز، پاشا، عین الله، علی و رستگار، آرش (۴۶). آمار و مدل سازی - چاپ شانزدهم، تهران، ایران: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران.

- 6- Barnett, A., Ziegler, R., Byleen, E. & Sobecki, D. (2012) . COLLEGE ALGEBRA WITH TRIGONOMETRY (9th edition). Mc Grow - Hill.
- 7- BATANERO, C. & BOROVCIK, M. (2016). Statistics and probability in high school. Springer.
- 8- Baxter, H., Handbury, M., Jeskins, J., Matthews, J. & Patmore, M. (2006) . GCSE MATHEMATICS FOR OCR. Italy: Brain Seager.
- 9- GRAHAM, A. (2006). Developing thinking in statistics. Sage.
- 10- Greenwell, Raymond & Margaret. (2012). precalculus mathematics for calculus.
- 11- Grigorieva, E. (2017). Methods of solving sequence and series Problems.
- 12- Pre- calculus Mc Graw Hill 12 Text book (2013).
- 13- NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- 14- SOWEY, E. & PETOCZ, P. (2017). A Panorama of Statistics: Perspectives, Puzzles and Paradoxes in Statistics. John Wiley & Sons.
- 15- Stewart et al. (2016) . precalculus mathematics for calculus.
- 16- Sullivan, M. (2011) . precalculus (9th edition). Pearson.
- 17- Urban, P., Owen, J., Martin, D., Haese, R., Haese, S. & Bruce, M. (2004) . Mathematics for the international student (International Baccalaureate Mathematics HL Course). Haese & Harris.
- 18- WATSON, J. M. (2013). Statistical literacy at school: Growth and goals. Routledge.

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایجاد نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پژوهش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می کند. برای تحقق این امر در اقدامی نووارانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راهنمایی شد تا با دریافت نظرات معلمان درباره کتاب‌های درسی تونیگاشت، کتاب‌های درسی را در اوین سال جای با مکترین اشکال به داشت آموزن و معلمان ارجمند تقدیم نمایند. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پژوهشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دیرخانه‌ای امیری از پژوهشی دروس و مدیریت محترم پژوهه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائه نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی و آمار ۳ با کد ۱۱۲۲۱۲

| ردیف | نام و نام خانوادگی | استان محل خدمت | ردیف | نام و نام خانوادگی | استان محل خدمت |
|------|-----------------------|------------------|------|------------------------|-------------------|
| ۱ | مصطفیه فدای | فارس | ۲۶ | اله بینی | کرمانشاه |
| ۲ | عاطفه وستی | همدان | ۲۷ | پرشیگ امانتی | کردستان |
| ۳ | چغفر صادق کوشش | شهر تهران | ۲۸ | برون طالب حسایی آذر | کردستان |
| ۴ | لیلی درستی | آذربایجان شرقی | ۲۹ | محمدعلی پورفتح کوهی | گلستان |
| ۵ | مرضیه نیک بخت | ایلام | ۳۰ | شهرزاد سیوری سلطانی | شهرستان‌های تهران |
| ۶ | ندا حیدریزاد | اردبیل | ۳۱ | رگس رشدانی جونی | البرز |
| ۷ | کرامت‌الله ایزدی | فارس | ۳۲ | محسن امیری پیشکی | کرمان |
| ۸ | ظاهره خلیلی | قزوین | ۳۳ | ظاهره سهراei | کرمانشاه |
| ۹ | عباس اسدی لطفه رسیدی | جهار محل و بخاری | ۳۴ | مهماز حضائی | خراسان شمالی |
| ۱۰ | سوسن علی مردانی | مرکزی | ۳۵ | فاطمه سادات شادا امیری | بوشهر |
| ۱۱ | لیلا حمیدی سه ده | البرز | ۳۶ | فرشاد تقی پاموری | قزوین |
| ۱۲ | سیده رفیه حسینی | البرز | ۳۷ | حیده‌محمدزاده | خراسان شمالی |
| ۱۳ | ملیحه سادات سادات | اصفهان | ۳۸ | فرزاده کخدایی | لرستان |
| ۱۴ | سلیمه مقتنی | خراسان رضوی | ۳۹ | افتنین خاصه‌خان | آذربایجان شرقی |
| ۱۵ | محمد رضا بخاری | بوشهر | ۴۰ | محمد توکلی | اصفهان |
| ۱۶ | سارة مادرگلی | خراسان جنوبی | ۴۱ | جواد راندی فر | خراسان جنوبی |
| ۱۷ | مهناز صبوری | شهر تهران | ۴۲ | علی فرشتنان | شهرستان‌های تهران |
| ۱۸ | عاطفه حسین بور | مازندران | ۴۳ | سیدده سینا | خوزستان |
| ۱۹ | رض رحیمی | اردبیل | ۴۴ | سکینه جیبی | لرستان |
| ۲۰ | سید ابوالفضل ناظلیان | همدان | ۴۵ | مهندی برجاج | سمنان |
| ۲۱ | مریم زیانی | خوزستان | ۴۶ | لولا کولاتی زاده | ارومیه، تاجیک |
| ۲۲ | اکرم سلامی | آذربایجان شرقی | ۴۷ | زههه صفائی | سمنان |
| ۲۳ | علی رضا اجارستانی | مازندران | ۴۸ | حبيب خالدی فرد | خوزستان |
| ۲۴ | مریم مجیدی فر | زنجان | ۴۹ | جمال برجهی | ایلام |
| ۲۵ | ابوب خلیلیان گل سطیدی | جهار محل و بخاری | ۵۰ | جمال نوین | بزد |